

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Danijel Bosnar

Zagreb, 2016.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Prof. dr. sc. Zdravko Virag, dipl. ing.

Student:

Danijel Bosnar

Zagreb, 2016.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći pritom znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem mentoru na ukazanoj pomoći koji je svojim znanjem, iskustvom i savjetima pridonio u izradi ovoga rada.

Danijel Bosnar



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:  
procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu	
Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum 19-09-2018	Prilog
Klasa: 602-04/16-6/3	
Ur.broj: 15-1703-16-348	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: Danijel BOSNAR

Mat. br.:0036468758

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Analiza Koanda strujanja oko kružnog cilindra**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Analysis of Coanda Jet Flow around a Circular Cylinder**

Opis zadatka:

Poznato je da mlaz fluida koji struji blizu površine naliježe na površinu, što se naziva Koanda efektom. Ovaj se efekt koristi u aerodinamici za povećanje sile uzgona nosećih površina, a također se pojavljuje u klimatizaciji pri strujanju zraka iz mlaznica u blizini stropa.

U ovom je radu potrebno simulirati strujanje mlaza oko polucilindrične površine polumjera  $R$ , na koju u gornjoj točki tangencijalno nastrujava mlaz debljine  $h$ . Iz rezultata simulacije treba odrediti raspodjelu tlaka i smičnog naprezanje po površini cilindra, te silu fluida na polucilindar i kut na kojem se strujanje odvaja od površine. Potrebno je analizirati utjecaj debljine mlaza i Reynoldsova broja na tu silu i kut odvajanja strujanja.

Rezultate prikazati grafički i tablično.

Navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

25. studenog 2015.

Zadatak zadao:

Rok predaje rada:

1. rok: 25. veljače 2016

2. rok (izvanredni): 20. lipnja 2016.

3. rok: 17. rujna 2016.

Predviđeni datumi obrane:


1. rok: 29.2., 02. i 03.03. 2016.

2. rok (izvanredni): 30. 06. 2016.

3. rok: 19., 20. i 21. 09. 2016.

Predsjednik Povjerenstva:

  
Prof. dr.sc. Zdravko Virag

  
Prof. dr. sc. Igor Balen



# Sadržaj:

Popis slika	IV
Popis tablica	V
Popis oznaka	VI
Sažetak	VIII
<b>1 Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2 Teorijske osnove</b>	<b>3</b>
2.1 Osnovne jednađbe dinamike fluida . . . . .	3
2.1.1 Zakon očuvanja mase (jednađba kontinuiteta) . . . . .	3
2.1.2 Zakon očuvanja količine gibanja . . . . .	3
2.1.3 Zakon momenta količine gibanja . . . . .	4
2.1.4 Zakon očuvanja energije . . . . .	4
2.1.5 Reynoldsov transportni teorem . . . . .	5
2.2 Turbulencija . . . . .	6
2.2.1 Statističko opisivanje turbulencije . . . . .	8
2.2.2 Vremenski osrednjene Navier-Stokesove jednađbe . . . . .	9
2.2.3 Modeli turbulencije . . . . .	10
2.2.4 $k - \omega$ SST model turbulencije . . . . .	11
2.2.5 Turbulentni granični sloj . . . . .	12
2.3 Metoda konačnih volumena . . . . .	14
2.3.1 Uzvodna shema (Upwind Differencing Scheme - UDS) . . . . .	17
2.3.2 Linearno uzvodna shema (Linear Upwind Scheme - LUDS) . . . . .	18
<b>3 Numerička simulacija</b>	<b>19</b>
3.1 Mreža, rubni i početni uvjeti . . . . .	21
3.2 Prikaz rezultata za omjer $\frac{h}{D} = \frac{1}{5}$ . . . . .	25
3.3 Prikaz rezultata za omjer $\frac{h}{D} = \frac{1}{10}$ . . . . .	32

3.4	Prikaz rezultata za omjer $\frac{h}{D} = \frac{1}{20}$	38
<b>4</b>	<b>Analiza rezultata</b>	<b>44</b>
<b>5</b>	<b>Zaključak</b>	<b>48</b>

# Popis slika:

1	Slika 1. Prijelaz iz laminarnog u turbulentno strujanje pri opstrujavanju ravne ploče . . . . .	7
2	Slika 2. Prijenos fizikalne veličine između konačnih volumena . . .	15
3	Slika 3. Linearno uzvodna shema . . . . .	18
4	Slika 4. Kvalitativan prikaz domene . . . . .	19
5	Slika 5. Diskretizacija područja . . . . .	21
6	Slika 6. Diskretizacija područja oko cilindra . . . . .	22
7	Slika 7. Prilagođavanje mreže tragu mlaza . . . . .	22
8	Slika 8. Polje brzina za Re: 10, 100, 1000, 10000, slučaj $\frac{h}{D} = \frac{1}{5}$ . .	25
9	Slika 9. Polje brzina za Re: 50000, 100000, 2000000, slučaj $\frac{h}{D} = \frac{1}{5}$	26
10	Slika 10. Raspodjela tlaka po cilindru spram kuta $\phi$ , slučaj $\frac{h}{D} = \frac{1}{5}$	27
11	Slika 11. Raspodjela smičnih naprezanja po cilindru, slučaj $\frac{h}{D} = \frac{1}{5}$	28
12	Slika 12. Definicija kuta $\phi$ . . . . .	29
13	Slika 13. Ovisnost koef. otpora $C_D$ o Reynoldsovom broju, slučaj $\frac{h}{D} = \frac{1}{5}$ . . . . .	30
14	Slika 14. Ovisnost koef. uzgona $C_L$ o Reynoldsovom broju, slučaj $\frac{h}{D} = \frac{1}{5}$ . . . . .	30
15	Slika 15. Ovisnost kuta odvajanja strujanja $\phi$ o Reynoldsovom broju, slučaj $\frac{h}{D} = \frac{1}{5}$ . . . . .	31
16	Slika 16. Polje brzina za Re: 10, 100, 1000, 5000, slučaj $\frac{h}{D} = \frac{1}{10}$ . .	32
17	Slika 17. Polje brzina za Re: 10000, 20000, slučaj $\frac{h}{D} = \frac{1}{10}$ . . . . .	33
18	Slika 18. Raspodjela tlaka po cilindru spram kuta $\phi$ , slučaj $\frac{h}{D} = \frac{1}{10}$	34
19	Slika 19. Raspodjela smičnih naprezanja po cilindru, slučaj $\frac{h}{D} = \frac{1}{10}$	35
20	Slika 20. Ovisnost koef. otpora $C_D$ o Reynoldsovom broju, slučaj $\frac{h}{D} = \frac{1}{10}$ . . . . .	36
21	Slika 21. Ovisnost koef. uzgona $C_L$ o Reynoldsovom broju, slučaj $\frac{h}{D} = \frac{1}{10}$ . . . . .	37
22	Slika 22. Ovisnost kuta odvajanja strujanja $\phi$ o Reynoldsovom broju, slučaj $\frac{h}{D} = \frac{1}{10}$ . . . . .	37
23	Slika 23. Polje brzina za Re: 10, 50, 100, 1000, 5000, slučaj $\frac{h}{D} = \frac{1}{20}$	39

24	Slika 24. Raspodjela tlaka po cilindru spram kuta $\phi$ , slučaj $\frac{h}{D} = \frac{1}{20}$	40
25	Slika 25. Raspodjela smičnih naprezanja po cilindru, slučaj $\frac{h}{D} = \frac{1}{20}$	41
26	Slika 26. Ovisnost koef. otpora $C_D$ o Reynoldsovom broju, slučaj $\frac{h}{D} = \frac{1}{20}$	42
27	Slika 27. Ovisnost koef. uzgona $C_L$ o Reynoldsovom broju, slučaj $\frac{h}{D} = \frac{1}{20}$	43
28	Slika 28. Ovisnost kuta odvajanja strujanja $\phi$ o Reynoldsovom broju, slučaj $\frac{h}{D} = \frac{1}{20}$	43
29	Slika 29. Usporedba koef. otpora $C_D$	45
30	Slika 30. Usporedba koef. uzgona $C_L$	46
31	Slika 31. Usporedba kuta odvajanja $\phi$	47

## Popis tablica:

1	Tablica 1. Granice i rubni uvjeti za laminarno strujanje . . . . .	23
2	Tablica 2. Granice i rubni uvjeti za turbulentno strujanje (za brzinu $U$ i tlak $p$ isto kao za laminarno) . . . . .	24
3	Tablica 3. Vrijednosti koef. otpora i uzgona te kuta odvajanja o Reynoldsovom broju, slučaj $\frac{h}{D} = \frac{1}{5}$ . . . . .	29
4	Tablica 4. Vrijednosti koef. otpora i uzgona te kuta odvajanja o Reynoldsovom broju, slučaj $\frac{h}{D} = \frac{1}{10}$ . . . . .	36
5	Tablica 5. Vrijednosti koef. otpora i uzgona te kuta odvajanja o Reynoldsovom broju, slučaj $\frac{h}{D} = \frac{1}{20}$ . . . . .	42
6	Tablica 6. Usporedba koeficijenta otpora, $C_D$ . . . . .	44
7	Tablica 7. Usporedba koeficijenta uzgona, $C_L$ . . . . .	45
8	Tablica 8. Usporedba kuta odvajanja, $\phi$ . . . . .	47

# Popis oznaka

Oznaka	Jedinica	Opis
$A_{ref}$	[m <sup>2</sup> ]	referentna površina za izračun koeficijenata otpora i uzgona
$C_D$	[-]	koeficijent otpora
$C_L$	[-]	koeficijent uzgona
$c_v$	[J/kgK]	specifični toplinski kapacitet
$D$	[kg/s]	jačina difuzije
$F$	[kg/s]	jačina konvekcije
$f_i$	[m/s <sup>2</sup> ]	komponente vektora specifične masene sile
$J_j$	[-]	vektor fluksa fizikalne veličine
$l_t$	[m]	duljina puta miješanja čestica fluida u turbulentnom strujanju
$k$	[J/kg]	kinetička energija turbulencije
$p$	[N/m <sup>2</sup> ]	tlak
$\bar{p}$	[N/m <sup>2</sup> ]	statistički osrednjeno polje tlaka
$p'$	[N/m <sup>2</sup> ]	pulzirajući dio polja tlaka
$q_H$	[W/m <sup>3</sup> ]	volumenska gustoća toplinskih izvora
$Re$	[-]	Reynoldsov broj
$T$	[K]	apsolutna temperatura
$t$	[s]	vrijeme
$v_i$	[m/s]	komponente vektora brzine strujanja
$\bar{v}_i$	[m/s]	statistički osrednjeni dio polja vektora brzine strujanja
$v'_i$	[m/s]	pulzirajući dio polja vektora brzine strujanja
$v_n$	[m/s]	projekcija vektora brzine u smjeru vanjske normale
$v_t$	[m/s]	karakteristična brzina turbulentnih pulsacija
$\delta_{ij}$	[-]	Kroneckerov delta, Kroneckerov simbol
$\Sigma_{ij}$	[N/m <sup>2</sup> ]	tenzor viskoznih naprezanja
$\lambda$	[W/mK]	toplinska provodnost materijala
$\varphi$	[-]	polje fizikalne veličine
$\Delta n$	[m]	udaljenost između čvorova konačnih volumena
$\Gamma$	[kg/ms]	koeficijent difuzije
$\Gamma_t$	[kg/ms]	koeficijent turbulentne difuzije

Oznaka	Jedinica	Opis
$\mu$	[Pas]	dinamička viskoznost
$\mu_t$	[kg/ms]	turbulentna viskoznost
$\rho$	[kg/m <sup>3</sup> ]	gustoća
$\nu$	[m <sup>2</sup> /s]	kinematička viskoznost
$\omega$	[s <sup>-1</sup> ]	specifična brzina disipacije

## Sažetak

U radu se numerički analizira ravninsko optjecanje cilindra promjera  $D$  tangencijalnim mlazom debljine  $h$  s ciljem kvantifikacije Coanda efekta. Ispituje se utjecaj debljine mlaza, odnosno omjer debljine mlaza i promjera cilindra i utjecaj Reynoldsova broja,  $Re = \frac{U_{ul} \cdot h}{\nu}$  gdje je  $U_{ul} = 1$  [m/s] (ulazna brzina mlaza) i  $h = 1$  [m] (debljina mlaza), a kinematička viskoznost  $\nu$  je mijenjana ovisno o Reynoldsu koji se htio dobiti, na kut odvajanja strujanja i sile na cilindar. Učinjene su simulacije za tri omjera,  $\frac{h}{D} = \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}$  za Reynoldsove brojeve od 10 do 200000, ovisno o omjeru. Za sve slučajeve proračunska domena je diskretizirana korištenjem računalnih programskih paketa *Salome* i *cfMesh* dok su numerički proračuni izvršeni u programskom paketu *OpenFOAM*.

Numeričke simulacije su pokazale da što je navedeni omjer manji to je kut odvajanja strujanja veći, npr. za  $Re = 1000$  za omjer  $\frac{h}{D} = \frac{1}{5}$  iznosi 17,983 stupnjeva dok za omjer  $\frac{h}{D} = \frac{1}{10}$  iznosi već 41,461 stupanj, a za omjer  $\frac{h}{D} = \frac{1}{20}$  iznosi 85,04 stupnjeva, a jednako vrijedi i za koef. otpora na cilindar, npr. za  $Re = 1000$  za omjer  $\frac{h}{D} = \frac{1}{5}$  koef. otpora je iznosa 0,0126027 dok za omjer  $\frac{h}{D} = \frac{1}{20}$  iznosi 0,08775555. Koeficijent uzgona pokazuje u svakom slučaju zasebno specifične karakteristike za  $Re < 1000$ , dok za  $Re > 1000$  pokazuje generalnu karakteristiku, a to je da se povećava povećanjem  $Re$  za kut odvajanja manji ili jednak 90 stupnjeva. Usporedbom slučajeva za iste  $Re$  pokazalo se da za  $Re \geq 100$  omjer  $\frac{h}{D} = \frac{1}{10}$  daje najveći koef. uzgona, npr. za  $Re = 1000$  za slučaj  $\frac{h}{D} = \frac{1}{10}$   $C_L$  iznosi 0,0983423, dok za slučaj  $\frac{h}{D} = \frac{1}{5}$  iznosi 0,0377455 i za slučaj  $\frac{h}{D} = \frac{1}{20}$  0,088493. Također u turbulentnom strujanju povećanjem Reynoldsova broja povećava se i kut odvajanja, npr. za omjer  $\frac{h}{D} = \frac{1}{10}$  kut odvajanja za  $Re = 1000$  iznosi 41.4461 stupanj, a za  $Re = 5000$  iznosi 57,618 stupanj.



# 1 Uvod

Coanda efekt naziv nosi prema Henri-u Coandi, rumunjskom inženjeru koji je tu pojavu prvi puta primijetio prilikom eksperimenta sa svojom letjelicom Coanda-1910, koja je zapravo prva letjelica na mlazni pogon ili preteča. Prilikom leta na svojoj letjelici, koja je imala motor sa unutrašnjim izgaranjem na nosu aviona, primijetio je da mu se plamen koji izlazi iz motora lijepi za drvenu konstrukciju i zbog toga je doživio i manju nesreću s tim avionom. Tek 20 godina nakon nesreće je shvatio o čemu se radi te raspravljajući tu temu 1934. s tada vodećim inženjerom aerodinamike T.von Karmanom nazvao je tu pojavu Coanda efektom. Henri Coanda je zatim 1935. predstavio patent koji opisuje Coanda efekt.

Coanda efekt je tendencija mlaza fluida da prati konturu zakrivljene površine u blizini te površine.

Bradshaw je Coanda efektu pridijelio tri značajke:

- tendencija mlaza fluida u blizini površine da se prilijepi uz tu površinu,
- tendencija mlaza fluida da ostane prilijepljen uz zaobljenu površinu,
- prilijepljeni mlaz se brže povećava uvlačeći okolni fluid.

Dok se Coanda mnogo bavio dizajniranjem i osmišljavanjem uređaja koji upotrebljavaju Coanda efekt ostali inženjeri su bili dosta skeptični i može se reći da nije pobudilo zainteresiranost. Tek kasnih 50-tih počeli su se inženjeri malo više baviti tom temom pa su tako učinjeni i prvi eksperimenti i analize (Wynanski, Newman, Voedisch, Neuendorf, Wenz itd.). Iako neki kažu da je još uvijek taj efekt nedovoljno detaljno istražen, Coanda efekt je primijenjen u mnogim uređajima. Najčešće se primijenjuje u svrhu dobivanja sile uzgona na tijelo. Neke od primjena su: NOTAR (NO TAil Rotor) helikopter, fluidički elementi, kod hidroelektrana za odvajanje vode od zagađenja, kontrola cirkulacije na krilu aviona, kod uređaja za klimatizaciju, u kardiovaskularnoj medicini, u meteorologiji za opisivanje određenih strujanja zraka sa planina, u Formuli 1 za usmjeravanje ispušnih plinova, razvoj VTOL (Vertical Take-Off and Landing) i UAV (Unmanned Aerial Vehicle) letjelica, u robotici Coanda izbacivač kao hvataljka itd.

U ovom radu razmatrat će se Coanda efekt na temelju 2D simulacija nastrujavanja mlaza zraka tangencijalno na polucilindričnu površinu pri različitim brzinama te će se

pritom pratiti utjecaj tog efekta na sile na polucilindar te i utjecaj omjera debljine mlaza i promjera cilindra na točku odvajanja. Proračun je izvršen pomoću programskog paketa OpenFOAM, a mreža dobivena pomoću cfMesh. Primijenjeni model turbulencije je  $k-\omega$  SST.

## 2 Teorijske osnove

### 2.1 Osnovne jednačbe dinamike fluida

Osnovni zakoni fizike na kojima se temelji dinamika fluida su:

1. Zakon očuvanja mase
2. Zakon očuvanja količine gibanja
3. Zakon očuvanja momenta količine gibanja
4. Drugi zakon termodinamike

Ovi fizikalni zakoni definirani su za materijalni volumen, a primijenjuju se za kontrolni volumen ili proizvoljni volumen.

Materijalni volumen se uvijek sastoji od jednih te istih čestica fluida te je ekvivalentan tijelu u mehanici i zatvorenom termodinamičkom sustavu u termodinamici. Kontrolni volumen je definiran kao volumen nepromjenjivog položaja, oblika i veličine, a proizvoljni volumen je volumen koji može biti promjenjiv u vremenu. Fluid koji se razmatra je homogen, jednofazan i kemijski inertan. Također vrijedi hipoteza kontinuuma.

#### 2.1.1 Zakon očuvanja mase (jednačba kontinuiteta)

Zakon očuvanja mase ili jednačba kontinuiteta za materijalni volumen glasi: Brzina promjene mase materijalnog volumena jednaka je nuli.

Diferencijalni konzervativni oblik jednačbe kontinuiteta je:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = 0. \quad (2.1)$$

Ako se radi o nestlačivom strujanju tj. ako nema promjene volumena diferencijalna jednačba kontinuiteta glasi:

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0. \quad (2.2)$$

#### 2.1.2 Zakon očuvanja količine gibanja

Zakon količine gibanja za materijalni volumen glasi: Brzina promjene količine gibanja materijalnog volumena jednaka je sumi vanjskih masenih i površinskih sila koje djeluju na materijalni volumen.

Diferencijalni oblik jednadžbe količine gibanja je:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j v_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i. \quad (2.3)$$

Tenzor naprezanja  $\sigma_{ji}$  modelira se pomoću Newtonovog zakona viskoznosti koji uspostavlja linearnu vezu između simetričnog tenzora naprezanja i tenzora brzine deformacije.

Polazeći od činjenice da u mirujućem plinu vlada termodinamički tlak  $p$ , a da su tangencijalna naprezanja jednaka nuli, tenzor naprezanja se može prikazati u obliku:

$$\sigma_{ji} = -p\delta_{ji} + \Sigma_{ji} \quad (2.4)$$

gdje je  $\delta_{ji}$  jedinični tenzor, a  $\Sigma_{ji}$  simetrični tenzor viskoznih naprezanja koji se modelira izrazom:

$$\Sigma_{ji} = \mu\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) + \left(\mu_V - \frac{2}{3}\mu\right)\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ji} = 2\mu D_{ji} + \left(\mu_V - \frac{2}{3}\mu\right)D_{kk}\delta_{ji}. \quad (2.5)$$

U nestlačivom strujanju je divergencija polja brzine jednaka nuli te su viskozna naprezanja opisana sljedećim izrazom:

$$\Sigma_{ji} = \mu\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) = 2\mu D_{ji}. \quad (2.6)$$

Sada se zakon očuvanja količine gibanja može zapisati u sljedećem obliku:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j v_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(-p\delta_{ji} + \Sigma_{ji}) + \rho f_i. \quad (2.7)$$

### 2.1.3 Zakon momenta količine gibanja

Zakon momenta količine gibanja za materijalni volumen glasi: Brzina promjene momenta količine gibanja materijalnog volumena u odnosu na odabrani pol jednaka je sumi momenata vanjskih masenih i površinskih sila koje djeluju na materijalni volumen u odnosu na taj isti odabrani pol. Ako se pretpostavi da u fluidu nema momenata raspodijeljenih po površini materijalnog volumena ili unutar samog volumena, tada se zakon očuvanja momenta količine gibanja svodi na činjenicu simetričnosti tenzora naprezanja što je gore već pretpostavljeno (uzeto u obzir).

### 2.1.4 Zakon očuvanja energije

Zakon očuvanja energije za materijalni volumen glasi: Brzina promjene zbroja kinetičke i unutarnje energije materijalnog volumena jednaka je snazi vanjskih masenih i površinskih

sila koje djeluju na materijalni volumen, te brzini izmjene topline materijalnog volumena s okolinom.

Diferencijalni oblik zakona očuvanja energije je:

$$\frac{\partial(\rho c_v T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho c_v v_j T)}{\partial x_j} = -p \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \Sigma_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + q_H, \quad (2.8)$$

gdje je  $q_H$  volumenska gustoća toplinskih izvora. Jednadžba (2.8) je izvedena uz primjenu dopunskih jednadžbi, kaloričke jednadžbe stanja i Fourierovog zakona toplinske vodljivosti.

### 2.1.5 Reynoldsov transportni teorem

Formulacija osnovnih fizikalnih zakona za materijalni volumen često nije pogodna za primjenu u praksi, budući da inženjera uglavnom ne zanimaju promjene fizikalnih veličina u nekom gibajućem materijalnom volumenu. Polaznu osnovu za metodu konačnih volumena čine oblici osnovnih zakona za kontrolni volumen, stoga se za preformuliranje osnovnih jednadžbi dinamike fluida za materijalni volumen u jednadžbe za kontrolni volumen koristi Reynoldsov transportni teorem.

Reynoldsov transportni teorem za slučaj glasi:

- a) slučaj promjenjivog kontrolnog volumena  $V_{KV}$  čija se granica  $S_{KV}$  giba brzinom  $u_j$ :

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_M(t)} \phi dV = \frac{d}{dt} \int_{V_{KV}} \phi dV + \int_{S(t)} \phi (v_j - u_j) n_j dS. \quad (2.9)$$

- b) slučaj mirujućeg  $u_j = 0$  kontrolnog volumena  $V_{KV}$  koji je ograden mirujućom kontrolnom površinom  $S_{KV}$ :

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_M(t)} \phi dV = \frac{d}{dt} \int_{V_{KV}} \phi dV + \int_{S_{KV}} \phi v_j n_j dS, \quad (2.10)$$

U gornjim jednadžbama (2.9) i (2.10) prvi član predstavlja brzinu promjene sadržaja  $\phi$  u materijalnom volumenu  $V_M$  (materijalna derivacija), drugi član predstavlja brzinu promjene sadržaja  $\phi$  u kontrolnom volumenu, a treći član predstavlja protok  $\phi$  kroz kontrolnu površinu. Veličina  $\phi$  označava volumensku gustoću fizikalne veličine.

## 2.2 Turbulencija

Turbulentno strujanje fluida je najčešći oblik strujanja u prirodi. To je nepravilno, kaotično vrtložno gibanje fluida. Problem turbulentnog strujanja nema egzaktnog analitičkog rješenja te je teško predvidivo jer bilo kakva nepravilnost u geometriji ili fluidu može unijeti poremećaj koji potakne tranziciju iz laminarnog u turbulentno područje.

Općenito strujanja fluida se mogu podijeliti u dvije kategorije na temelju Reynoldsovog broja koji je bezdimenzijski i prikazuje omjer inercijskih i viskoznih sila u strujanju fluida:

$$Re = \frac{v \cdot x}{\nu}, \quad (2.11)$$

gdje  $v$  označuje brzinu strujanja fluida,  $x$  karakterističnu duljinu, a  $\nu$  kinematičku viskoznost fluida.

Laminarno strujanje javlja se pri niskim vrijednostima Reynoldsovog broja, kada su viskozne sile dominantne naspram inercijskih i karakterizira ga uredno gibanje čestica fluida.

Turbulentno strujanje je izrazito nestacionarno strujanje, koje se javlja pri visokim vrijednostima Reynoldsovog broja, kada su inercijske sile dominantne nad viskoznim. Karakteriziraju ga slučajne pulsacije brzine i tlaka, te intenzivno miješanje fluida na razini čestica. Intenzivno miješanje na nivou čestica daje turbulentnom strujanju difuzijski karakter čija je posljedica povećana disipacija energije.

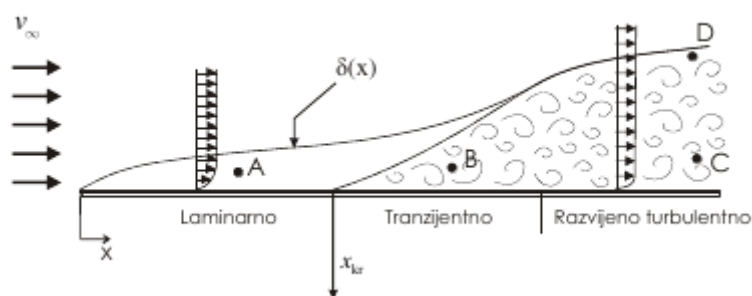
Laminarno nestlačivo strujanje fluida konstantnog koeficijenta viskoznosti može se opisati sustavom Navier Stokesovih jednadžbi - jednadžbom kontinuiteta i jednadžbom količine gibanja.

Kod viših vrijednosti Reynoldsovog broja strujanje postaje nestabilno u odnosu na male perturbacije, a povećavanjem Reynoldsovog broja strujanje prelazi u režim razvijenog turbulentnog strujanja. Matematičko ispitivanje stabilnosti rješenja Navier-Stokesovih jednadžbi vrši se dodavanjem male vremensko-prostorne perturbacije polja brzine i tlaka na osnovno stacionarno rješenje. Tako dobivene jednadžbe mogu se linearizirati, te se njihovim rješavanjem ustanovljava da li perturbacije slabe u vremenu. Ako slabe, strujanje je stabilno i ostaje stacionarno i laminarno. Ako se perturbacije pojačavaju u vremenu strujanje postaje nestacionarno, bez obzira na stacionarne rubne uvjete i postupno dobiva složen i kaotičan karakter te takvo strujanje nazivamo turbulentnim. Analitičko opisanje takvog strujanja nije moguće pa se pribjegava različitim modelima turbulencije.

Takav pristup statistički osrednjava sve fizikalne veličine te omogućava korištenje većeg prostornog i vremenskog koraka prilikom računanja. Postoji više pristupa modeliranju Navier-Stokesovih jednadžbi: RANS, URANS, DES, LES...

Kritičan Reynoldsov broj je broj kod kojeg se pojavi prva perturbacija koja ne slabi u vremenu, te tada počinje proces tranzicije laminarnog u turbulentno strujanje. Kritičan Reynoldsov broj nije univerzalna veličina, njegova vrijednost ovisi o uvjetima strujanja, geometriji opstrujavajućeg tijela, pobudama u obliku vibracija itd. Tako postoje donji kritični Reynoldsov broj, vrijednost ispod koje se sigurno ne pojavljuje turbulentno strujanje, te gornji kritični Reynoldsov broj koji je vrijednost iznad koje se ne može održati laminarno strujanje.

Na slici 1 prikazano je opstrujavanje ravne ploče. Na samom početku, gdje je Reynoldsov broj manji od donje kritične vrijednosti vlada laminarno strujanje. U presjeku  $x = x_{kr}$  kada Reynoldsov broj poprimi kritičnu vrijednost  $Re_{kr} = \frac{v_\infty x_{kr}}{\nu}$  pojavljuje se nestabilnost. Daljnjim udaljavanjem od tog presjeka u smjeru strujanja pulsacije postaju sve izraženije, te nakon nekog presjeka vlada potpuno razvijeno strujanje.



**Slika 1. Prijelaz iz laminarnog u turbulentno strujanje pri opstrujavanju ravne ploče**

I u laminarnom i u turbulentnom strujanju u neposrednoj blizini tijela je prisutno područje u kojem se brzina fluida mijenja od nule (na samoj površini tijela, zbog viskoznosti fluida koji se lijepi za stijenu), do brzine neporemećenog strujanja. To područje naziva se graničnim slojem, unutar kojeg se ni u turbulentnom strujanju, gdje su inercijalne sile dominantne nad viskoznim, ne mogu zanemariti viskozne sile. Ipak, zbog izraženije difuzije, koja ima tendenciju ujednačavanja profila, u turbulentnom strujanju profil brzine će biti ujednačeniji, pa će, zbog izraženijeg gradijenta brzine na stijenci, biti veće i smično

naprezanje.

### 2.2.1 Statističko opisivanje turbulencije

Rezultat direktnog rješavanja Navier-Stokesovih jednadžbi bio bi skup numeričkih vrijednosti traženih polja fizikalnih veličina u velikom broju prostornih točaka za veliki broj vremenskih koraka što znači da bi takva vrsta izračuna dala jako veliki broj rezultata. Velik broj rezultata bi bio problematičan sa stajališta brzine računanja dok inženjere najčešće zanimaju prosječne vrijednosti fizikalnih veličina, integralne veličine poput protoka, naprezanja na nekoj površini itd. Tako se nameće ideja da se prije rješavanja Navier-Stokesovih jednadžbi sve veličine u tim jednadžbama uprosječe te da se rješavaju jednadžbe za uprosječene veličine koje inženjera i zanimaju.

Danas se najčešće koristi vremensko (Reynoldsovo) uprosječenje prema kojem se neka veličina (tlak, brzina) u turbulentnom strujanju može prikazati kao zbroj vremenski osrednjene vrijednosti i pulsirajućeg dijela.

Ako je  $f$  neka veličina u turbulentnom strujanju ona se može prikazati zbrojem vremenski prosječne vrijednosti  $\bar{f}$  i pulsirajućeg dijela  $f'$ . Prosječna (srednja) vrijednost  $\bar{f}$  u razdoblju  $T_0$  je po definiciji

$$\bar{f}(x_i, t) = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(x_i, t - \tau) d\tau \quad (2.12)$$

gdje  $T_0$  mora biti odabrano tako da vrijedi  $\overline{\bar{f}} = \bar{f}$ . Vremenski osrednjena vrijednost pulsirajućeg dijela bilo koje fizikalne veličine jednaka je nuli

$$\overline{f'} = 0. \quad (2.13)$$

Također vrijedi da je srednja vrijednost derivacije jednaka derivaciji srednje vrijednosti

$$\frac{d\bar{f}}{dx_i} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}, \quad (2.14)$$

$$\frac{d\bar{f}}{dt} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} \quad (2.15)$$

Također još vrijede relacije npr. za dvije veličine u turbulentnom strujanju  $f$  i  $g$ :

$$\overline{\bar{f} \cdot g'} = 0 \quad \overline{\bar{f} \cdot g} = \bar{f} \cdot \bar{g} \quad \overline{f \cdot g} = \bar{f} \cdot \bar{g} + \overline{f' \cdot g'}. \quad (2.16)$$

Prosječna vrijednost umnoška dvaju pulsirajućih dijelova fizikalnih veličina nije jednaka nuli (na temelju tog umnoška se može govoriti o korelaciji dviju veličina koja se izražava



koeficijentom korelacija  $R$ , čija se vrijednost kreće od nule do jedan).

### 2.2.2 Vremenski osrednjene Navier-Stokesove jednačbe

Promatrat ćemo nestlačivo turbulentno strujanje gdje ćemo zanemariti utjecaj masenih sila. Ako za fizikalna polja brzine i tlaka kao veličina u turbulentnom strujanju vrijede relacije od (2.12) do (2.16) dobiju se Navier-Stokesove jednačbe osrednjene Reynoldsovim osrednjavanjem:

$$\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \rho \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_j \bar{v}_i) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{v'_i v'_j} \right]. \quad (2.18)$$

Skup vremenski osrednjenih jednačbi kontinuiteta (2.17) i količine gibanja (2.18) se naziva Reynoldsovim jednačbama.

Član  $\overline{v'_i v'_j}$  u jednačbi (2.18) je dvojna korelacija koja se javlja kao posljedica Reynoldsovog osrednjavanja. Ako bismo izveli jednačbu za dvojni korelaciju pojavile bi se trojna korelacija i još neke nove nepoznate korelacije za koje ako bismo dalje izvodili jednačbe broj nepoznanica bi rastao brže od broja jednačbi. Iz tog razloga pribjegava se modeliranju zbog kojeg taj pristup nije egzaktn.

Član  $-\rho \overline{v'_i v'_j}$  nazivamo turbulentna ili Reynoldsova naprezanja.

$$-\rho \overline{v'_i v'_j} = \begin{bmatrix} -\overline{\rho v'_1 v'_1} & -\overline{\rho v'_1 v'_2} & -\overline{\rho v'_1 v'_3} \\ & -\overline{\rho v'_2 v'_2} & -\overline{\rho v'_2 v'_3} \\ sim. & & -\overline{\rho v'_3 v'_3} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Fizikalno gledajući Reynoldsova naprezanja predstavljaju transport količine gibanja turbulentnim fluktuacijama. Turbulentna difuzija je prijenos količine gibanja zbog turbulentnog miješanja čestica fluida. Uvodi se pojam turbulentne viskoznosti  $\mu_T$  koja nije fizikalno svojstvo fluida već posljedica režima strujanja.

Već je objašnjeno zbog čega se ovaj član ne opisuje pomoću jednačbi, već se modelira, čime se gubi dio informacija koje sadrže Navier – Stokesove jednačbe.

### 2.2.3 Modeli turbulencije

Zadatak modela turbulencije je usklađivanje broja jednadžbi i broja nepoznanica koje se javljaju u Navier – Stokesovim jednadžbama, modeliranjem člana pulsirajućeg strujanja pomoću poznatih parametara sustava. Modeli turbulencije se dijele s obzirom na red korelacije brzina za koju se rješava transportna jednadžba na: modele prvog, drugog i trećeg reda. Zahtjevi koji se nameću svakom modelu turbulencije su točnost, mogućnost rješavanja i jednostavnost, stoga viši model turbulencije ne mora nužno biti i bolji model, a budući da ima povećan broj članova koje treba modelirati, često nije i najtočniji.

U modelima prvog reda modelira se dvojnja korelacija brzina prema hipotezi Boussinesqa u obliku:

$$-\rho \overline{v'_i v'_j} = \mu_t \left( \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho \bar{k} \delta_{ij} \quad (2.20)$$

gdje je  $\mu_t$  koeficijent turbulentne viskoznosti koji je funkcija uvjeta strujanja, a u laminarnom strujanju jednak je nuli dok je  $\bar{k}$  kinetička energija turbulencije. Modeli koji se temelje na gornjoj pretpostavci nazivaju se Newtonovskim modelima turbulencije, budući da su analogni s Newtonovim zakonom viskoznosti.

Uvrštavanjem hipoteze Boussinesqa u Reynoldsove jednadžbe one prelaze u oblik:

$$\frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_j} = 0 \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial \rho \overline{v_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \overline{v_j v_i}) = - \frac{\partial \left( \bar{p} + \frac{2}{3} \rho \bar{k} \right)}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (2.22)$$

Hipotezom Boussinesqa šest komponenti tenzora Reynoldsovih naprezanja modelirano je jednim nepoznatim poljem koeficijenta turbulentne viskoznosti.

Postoji više načina modeliranja koeficijenta turbulentne viskoznosti, a u osnovi se koristi analogija s kinetičkom teorijom plinova. Prema kinetičkoj teoriji plinova, molekularna viskoznost fluida proporcionalna je gustoći fluida, slobodnoj putanji molekula i karakterističnoj brzini gibanja molekula. Prema tome se turbulentnu viskoznost definira u obliku:

$$\mu_t = \rho l_t v_t \quad (2.23)$$

gdje su  $l_t$  duljina puta miješanja čestica fluida u turbulentnom strujanju (karakteristična duljina turbulencije), a  $v_t$  je karakteristična brzina turbulentnih pulsacija.

Gornja relacija (2.23) čini osnovu za veći broj modela turbulencije koji se razlikuju po definiciji te dvije karakteristične veličine u turbulenciji, a jedan od njih je i  $k - \omega$  model turbulencije koji spada u diferencijalni model s dvije jednačbe.

### 2.2.4 $k - \omega$ SST model turbulencije

SST  $k - \omega$  model turbulencije je diferencijalni model s dvije dodatne jednačbe koji je u zadnje vrijeme postao veoma popularan. SST (Shear Stress Transport) formulacija kombinira  $k - \omega$  i  $k - \epsilon$  modele. U području blizu stjenke se koristi  $k - \omega$  model koji je u blizini zida bolji, dok se u domeni strujanja daleko od zida model prebacuje na  $k - \epsilon$  model. Tako se izbjegava problem  $k - \omega$  modela koji je previše osjetljiv na turbulentna svojstva ulaznog slobodnog mlaza. SST  $k - \omega$  model je posebno pogodan za računanje točke odvajanja strujanja te će se zato i ovdje primijeniti.

Prva transportna varijabla je turbulentna kinetička energija  $k$ , a druga,  $\omega$ , označuje kutnu brzinu rotacije čestica fluida odnosno specifičnu disipaciju.

Skup jednačbi koji opisuje  $k - \omega$  SST model turbulencije za nestlačivo strujanje se sastoji od:

- jednačbe kontinuiteta

$$\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (2.24)$$

- jednačbe količine gibanja

$$\frac{\partial \rho \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \bar{v}_j \bar{v}_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (2.25)$$

- jednačbe za kinetičku energiju turbulencije,  $k$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial (v_j k)}{\partial x_j} = P_k - \beta^* k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \sigma_k \nu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (2.26)$$

- jednačbe za specifičnu brzinu disipacije kinetičke energije turbulencije,  $\omega$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial (v_j \omega)}{\partial x_j} = \alpha S^2 - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \sigma_\omega \nu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + 2(1 - F_1) \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \quad (2.27)$$

- kinematička turbulentna viskoznost

$$\nu_t = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, S F_2)} \quad (2.28)$$

Pomoćne relacije potrebne za definiranje sustava su:

$$F_2 = \tanh \left[ \left[ \max \left( \frac{2\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right) \right]^2 \right],$$

$$P_k = \min \left( \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, 10\beta^* k \omega \right),$$

$$F_1 = \tanh \left\{ \left\{ \min \left[ \max \left( \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right), \frac{4\sigma_{\omega 2} k}{C \cdot D_{k\omega} y^2} \right] \right\}^4 \right\},$$

$$\phi = \phi_1 F_1 + \phi_2 (1 - F_1).$$

Koeficijenti u gornjim jednadžbama su konstantni i iznose:

$$\alpha_1 = \frac{5}{9}; \quad \alpha_2 = 0,44; \quad \beta_1 = \frac{3}{40}; \quad \beta_2 = 0,0828; \quad \beta^* = 0,09;$$

$$\sigma_{k1} = 0,85; \quad \sigma_{k2} = 1; \quad \sigma_{\omega 1} = 0,5; \quad \sigma_{\omega 2} = 0,856.$$

### 2.2.5 Turbulentni granični sloj

Eksperimentalna istraživanja pokazala su da brzina fluida u smjeru strujanja ovisi o udaljenosti od stjenke prema logaritamskom zakonu. Ta zapažanja uvjetovala su nastanak "zakona o zidu" koji opisuje odnose veličina u turbulentnom strujanju blizu stjenke. Kombinacijom empirijskih opažanja i dimenzijske analize dolazi se do sljedećih odnosa.

Skala brzine

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (2.29)$$

se definira kao brzina trenja jer ima dimenziju [m/s].

Također je moguće definirati skalu duljine  $\frac{\nu}{u_\tau}$  [m] te uzimajući u obzir koordinatu u smjeru normale na stjenku  $y$  te gradijent brzine  $\frac{\partial v}{\partial y}$  dobiva se izraz:

$$\frac{\bar{v}}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_\tau y}{\nu} + C, \quad (2.30)$$

gdje  $C$  predstavlja bezdimenzijsku konstantu, a  $\bar{v}$  srednju brzinu fluida u smjeru strujanja u određenoj točki. Supstitucijom izraza u jednadžbi (2.30)

$$u^+ \equiv \frac{\bar{v}}{u_\tau}, \quad (2.31)$$

$$y^+ \equiv \frac{u_\tau y}{\nu} \quad (2.32)$$

i preuređenjem dobiva se konačni izraz:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln E y^+. \quad (2.33)$$

$\kappa = 0,41$  - von Karmanova konstanta i

$E = 9,793$  - empirijska konstanta.

Ovisno o iznosu  $y^+$  turbulentni granični sloj dijeli se u tri područja:

- $0 < y^+ \leq 5$  - viskozni (linearni) podsloj
- $5 < y^+ \leq 30$  - prijelazni sloj
- $30 \leq y^+ < 400$  - inercijski podsloj

U viskoznom podsloju gdje je utjecaj turbulencije jako mali, odnosno molekularna viskoznost dominira nad turbulentnom viskoznošću, vrijedi linearni odnos

$$u^+ = y^+, \quad (2.34)$$

dok u inercijalnom podsloju gdje prevladava utjecaj turbulencije vrijedi logaritamski odnos pod (2.33).

U prijelaznom sloju su molekularna i turbulentna viskoznost istog reda veličine.

## 2.3 Metoda konačnih volumena

Za rješavanje problema računalne dinamike fluida uglavnom se koristi metoda konačnih volumena koja je najpovoljnija jer nije skupa sa stajališta brzine rješavanja i zauzimanja memorije te je primijenjiva na složena područja.

Metoda konačnih volumena je integralna metoda koja se temelji na integriranju konzerativnog oblika transportnih jednadžbi

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j \varphi)}{\partial x_j} - \Gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_j} = S_\varphi \quad (2.35)$$

po konačnim volumenima na koje je podijeljeno, diskretizirano područje proračuna.

Članove sa lijeve strane jednadžbe (2.35) fizikalno predstavljaju:

- prvi član predstavlja lokalnu promjenu fizikalnog svojstva,
- drugi član predstavlja konvektivni prijenos fizikalnog svojstva,
- treći član predstavlja prijenos fizikalnog svojstva putem difuzije.

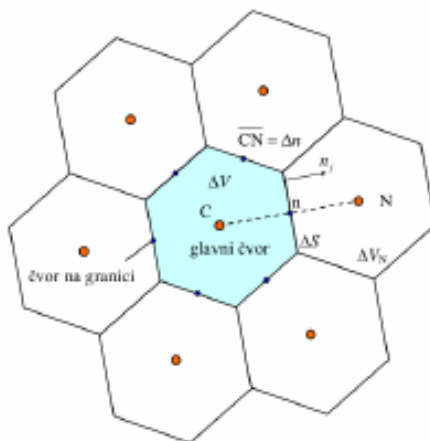
Ukupni protok fizikalnog svojstva, tj. vektor fluksa  $J_j$  čine zajedno drugi i treći član.

Član sa desne strane,  $S_\varphi$ , označava izvorski član fizikalnog svojstva.

Kada tu jednadžbu integriramo po konačnom volumenu dobije se:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta V} \rho \varphi dV = - \int_{\Sigma \Delta S} \left( \rho v_j \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) n_j dS + \int_{\Delta V} S_\varphi dV. \quad (2.36)$$

Član sa lijeve strane označava brzinu promjene sadržaja nekog fizikalnog svojstva  $\varphi$  u konačnom volumenu, prvi član s desne strane označava zbroj konvektivnog i difuzijskog protoka fizikalnog svojstv  $\varphi$  kroz granice volumena, a drugi član izvor fizikalnog svojstva.



**Slika 2. Prijenos fizikalne veličine između konačnih volumena**

U jednadžbi (2.36) je protok fizikalnog svojstva definiran kao pozitivan kad se odnosi od konačnog volumena prema okolini, pa je jasno da će se uslijed takvog protoka zbog minusa ispred integrala sadržaj fizikalnog svojstva u konačnom volumenu smanjivati. Gornja jednadžba mora biti zadovoljena za svaki konačni volumen, što metodi konačnih volumena daje bitno svojstvo konzervativnosti.

Vrijednosti fizikalnih veličina se izračunavaju u položajima čvorova geometrijske mreže, koji se najčešće nalaze u sredini konačnog volumena.

Prvi član u jednadžbi (2.36), član s lijeve strane, pojednostavljuje se uz pretpostavku da je konačni volumen dovoljno mali kako bi se fizikalno svojstvo  $\varphi$  aproksimiralo linearnom raspodjelom te uz uvjet da je točka C težište volumena  $\Delta V$  i gustoća  $\rho$  konstantna vrijedi:

$$\int_{\Delta V} \rho \varphi dV = \rho \varphi_c \Delta V \quad (2.37)$$

Za integral izvorskog člana vrijedi slično te se treći član jednadžbe (2.36) primjenom teorema o srednjoj vrijednosti i aproksimacijom srednje vrijednosti sa vrijednošću u centralnom čvoru aproksimira izrazom:

$$\int_{\Delta V} S_\varphi dV = S_c \Delta V \quad (2.38)$$

gdje je  $S_c$  srednja vrijednost izvorskog člana unutar volumena  $\Delta V$ .

Drugi član jednadžbe (2.36) koji predstavlja ukupni vektor toka  $J_j$ , sastoji se od konvektivnog i difuzijskog člana, pri čemu doprinos ostvaruje samo normalna komponenta vektora toka  $J_j \cdot n_j$

$$J_j n_j = \int_{\Sigma \Delta S} \left( \rho v_j \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) n_j dS = \int_{\Sigma \Delta S} \left( \rho v_n \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS = \left[ \rho (\overline{v_n \varphi})_n - \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_n \right] \Delta S \quad (2.39)$$

Srednja vrijednost umnoška  $(\overline{v_n \varphi})_n$  prikazuje se kao umnožak srednjih vrijednosti normalne komponente brzine i vrijednosti fizikalnog svojstva u težištu površine  $\Delta S$ . Srednju vrijednost normalne derivacije na površini  $\Delta S$  aproksimira se vrijednošću normalne derivacije u težištu površine  $\Delta S$ . Uz uvođenje bezdimenzijske koordinate  $\tilde{n}$ ,

$$\tilde{n} = \frac{n}{\Delta n}$$

gdje je  $\Delta n$  udaljenost između centralnog čvora C promatranog konačnog volumena i središta N susjednog konačnog volumena, normalnu komponentu ukupnog protoka može se zapisati u obliku

$$J_j n_j = (\rho v_n \Delta S)_n \varphi_n - \Gamma \frac{\Delta S}{\Delta \tilde{n}} \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} \Big|_n = F_n \varphi_n - D_n \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} \Big|_n. \quad (2.40)$$

U jednadžbi (2.40) pojavljuje se član  $F_n$  koji nazivamo jačinom konvekcije

$$F_n = \rho v_{n,n} \Delta S$$

te član  $D_n$  koji nazivamo jačinom difuzije

$$D_n = \Gamma \frac{\Delta S}{\Delta n}.$$

Omjer

$$Pe_\Delta = \frac{F_n}{D_n} = \frac{\rho v_{n,n} \Delta n}{\Gamma}$$

se naziva lokalnim Pecletovim brojem. Lokalni Pecletov broj je to manji što su volumeni sitniji (manji  $\Delta n$ ), čime lokalni utjecaj difuzijskog transporta postaje veći.

Budući da jačinu konvekcije  $F_n$  i jačinu difuzije  $D_n$  možemo izračunati, jedina nepoznanica ostaje polje fizikalne veličine  $\varphi$ . Kako se u numeričkom postupku računaju i pamte samo čvorne vrijednosti polja  $\varphi$ , u glavnim čvorovima, potrebno je aproksimirati tražene vrijednosti na stranicama konačnih volumena s pomoću vrijednosti u glavnim čvorovima. Aproksimacije se vrše numeričkim shemama ili shemama diferencije. U ovom radu se koriste uzvodna i linearna uzvodna shema.



Uvrštavanjem izraza (2.37), (2.38) i (2.40) u (2.36) slijedi

$$\rho \frac{d\varphi_C}{dt} \Delta V = - \sum_{nb=1}^{N_{nb}} \left( F_n \varphi_n - D_n \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} \Big|_n \right)^{nb} + S_C \Delta V, \quad (2.41)$$

gdje je  $N_{nb}$  broj stranica konačnog volumena.

Ako kažemo da  $\Delta J_n$  predstavlja ukupni protok fizikalnog svojstva  $\varphi$  kroz površinu  $\Delta S$  čije je težište točka  $n$ , tada se primjenom shema diferencije koje koriste samo čvorne vrijednosti  $\varphi_C$  i  $\varphi_N$   $\Delta J_n$  može prikazati u obliku

$$\Delta J_n = F_n \varphi_n - D_n \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} \Big|_n = F_n \varphi_C + a_N (\varphi_C - \varphi_N), \quad (2.42)$$

gdje koeficijent  $a_N$  zavisi od primijenjene sheme diferencije.

Uvrštavanjem (2.42) u (2.41) dobije se

$$\rho \Delta V \frac{d\varphi_C}{dt} = -\varphi_C \sum_{nb=1}^{N_{nb}} a_N^{nb} + \sum_{nb=1}^{N_{nb}} [a_N^{nb} \varphi_N^{nb}] + S_C \Delta V. \quad (2.43)$$

Kada bi se primijenila potpuno implicitna metoda za integriranje, linearizacija izvorskog člana te uredila jednačba (2.43), jednačba (2.43) bi glasila

$$a_C \varphi_C = \sum_{nb=1}^{N_{nb}} [a_N^{nb} \varphi_N^{nb}] + b. \quad (2.44)$$

Jednačba (2.44) je linearna algebarska jednačba dobivena diskretizacijom integrala po konačnom volumenu s centralnim čvorom C. Kada se postupak ponovi za sve konačne volumene unutar područja dobije se sustav linearnih algebarskih jednačbi u kojem su nepoznanice čvorne vrijednosti polja  $\varphi$ . Prije rješavanja tog sustava potrebno bi bilo još uvrstiti rubne uvjete.

Nadalje će se objasniti uzvodna i linearna uzvodna shema diferencije jer su korištene u ovom radu.

### 2.3.1 Uzvodna shema (Upwind Differencing Scheme - UDS)

Uzvodna shema prvog reda je najjednostavnija numerička shema. Pretpostavlja se da je vrijednost fizikalne veličine na stranici jednaka vrijednosti u čvoru konačnog volumena uzvodno.

Difuzijski transport je simetričan, pa se za njegovu diskretizaciju koristi shema centralnih razlika koja daje najbolje rješenje:

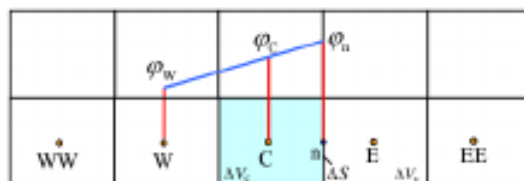
$$-D \frac{d\varphi}{dn} = -D(\varphi_N - \varphi_C). \quad (2.45)$$

Sheme će se razlikovati po modeliranju konvekcijskog transporta.

Osnovna prednost ove sheme je jednostavnost implementacije i stabilna rješenja, i često je najbolja shema za početak proračuna. Nedostatak je što ova shema unosi lažnu difuziju u rješenje.

### 2.3.2 Linearno uzvodna shema (Linear Upwind Scheme - LUDS)

Vrijednost fizikalne veličine  $\varphi$  na stranici ( $\varphi_n$ ) određuje se linearnom ekstrapolacijom vrijednosti iz dvaju čvorova uzvodno.



Slika 3. Linearno uzvodna shema

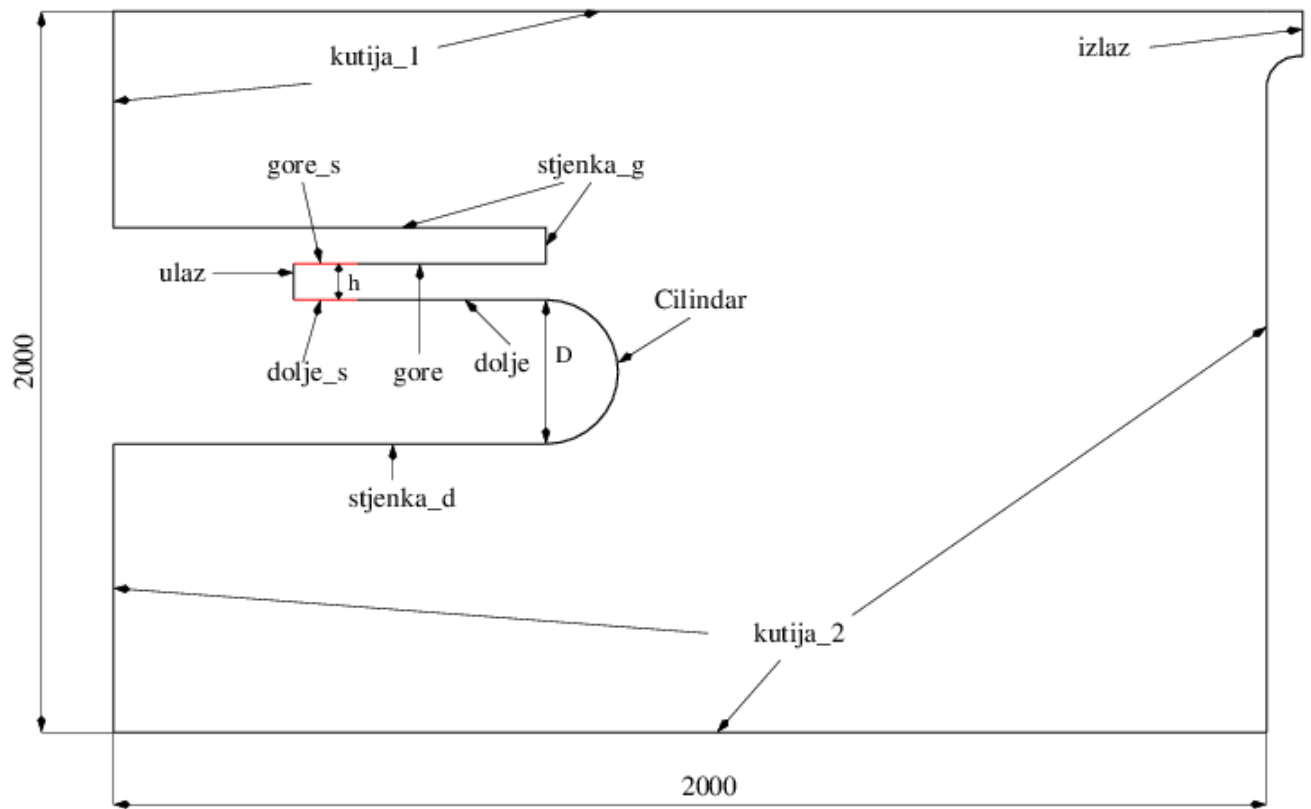
Difuzijski transport se definira shemom centralnih razlika, jednako kao u uzvodnoj shema, jednadžba (2.45). Izraz za  $\varphi_n$  u konvekcijskom transportu glasi:

$$\varphi_n = \varphi_C + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_C = \varphi_C + \frac{1}{2} (\varphi_C - \varphi_W) \quad \text{za } F > 0, \quad (2.46)$$

$$\varphi_n = \varphi_E + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_E = \varphi_E + \frac{1}{2} (\varphi_E - \varphi_{EE}) \quad \text{za } F < 0. \quad (2.47)$$

Ova shema generira negativne koeficijente, te će davati oscilatorno rješenje u blizini diskontinuiteta. Uzvodna shema drugog reda točnosti je numerička shema koja se često koristi zbog zadovoljavajućeg odnosa točnosti i stabilnosti.

### 3 Numerička simulacija



Slika 4. Kvalitativan prikaz domene

Na slici 4 dan je kvalitativan prikaz domene.

Kroz ulaz nastrujava mlaz debljine  $h$  tangencijalno na cilindar promjera  $D$ . Zrak u ostatku područja je u stanju mirovanja u početku. Izlaz je postavljen daleko od cilindra i ulaza kako bi imao što manje utjecaja. Debljina, odnosno dimenzija domene u smjeru  $z$  osi je  $1\text{[m]}$ .

Numeričke simulacije su 2D tipa, a napravljene su za iduće omjere visine mlaza, odnosno visine ulaza  $h$  i promjera cilindra  $D$ :

$$\frac{h}{D} = \frac{1}{5}, \quad \frac{h}{D} = \frac{1}{10}, \quad \frac{h}{D} = \frac{1}{20}.$$

Domena je više stotina puta veća od samog promjera da se unese što manja pogreška. Za proračun se koristio rješavač pimpleFoam, odnosno algoritam pimple koji je određen spoj algoritama PISO i simple.

Ulazna visina  $h$  mlaza držala se konstantnom,  $h = 1$  m, a mijenjao se promjer cilindra. Reynoldsov broj računat je na temelju visine  $h$  kao karakteristične duljine, brzine strujanja  $U_{ul}$  koja je na ulazu uvijek držana konstantnom,  $U_{ul} = 1$  [m/s], dok se mijenjala kinematička viskoznost  $\nu$ . Za svaki slučaj omjera debljine mlaza i promjera simulacija se izvršavala za Reynoldsove brojeve počevši od  $Re = 10$  pa dok se mlaz ne bi potpuno "omotao" oko cilindra odnosno zaokrenuo za  $180^\circ$ .

Tako su napravljene simulacije za Reynoldsove brojeve:

a)  $\frac{h}{D} = \frac{1}{5}$

Re: 10, 100, 1000, 10000, 50000, 100000, 200000

b)  $\frac{h}{D} = \frac{1}{10}$

Re: 10, 100, 1000, 5000, 10000, 20000

c)  $\frac{h}{D} = \frac{1}{20}$

Re: 10, 50, 100, 1000, 5000.

Prilikom analize sile na cilindar analizirati će se koeficijent otpora  $C_D$  i koeficijent uzgona  $C_L$ .

Sila fluida na tijelo obično se za slučaj ravninskog strujanja rastavlja na komponente, silu otpora  $F_D$  i silu uzgona  $F_L$ . Sile otpora i uzgona najčešće se prikazuju u bezdimenzijskim oblicima koeficijenta otpora  $C_D$  i koeficijenta uzgona  $C_L$  koji su definirani izrazima:

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u_\infty^2 \cdot A_{ref}}, \quad C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u_\infty^2 \cdot A_{ref}}. \quad (3.1)$$

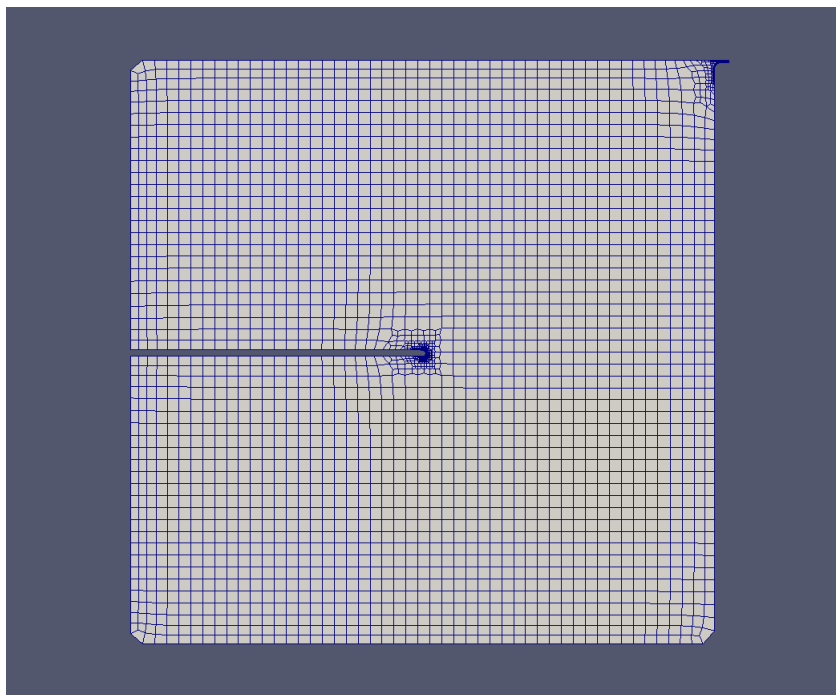
Izraz  $\frac{1}{2}\rho \cdot u_\infty^2$  predstavlja dinamički tlak, a  $A_{ref}$  referentnu površinu koja u simulacijama iznosi  $A_{ref} = D$ , projekcija površine u smjeru x osi.

Rezultati simulacije će se prikazati prvo redoslijedom za svaki omjer posebno zatim će se dati usporedba svih slučajeva.

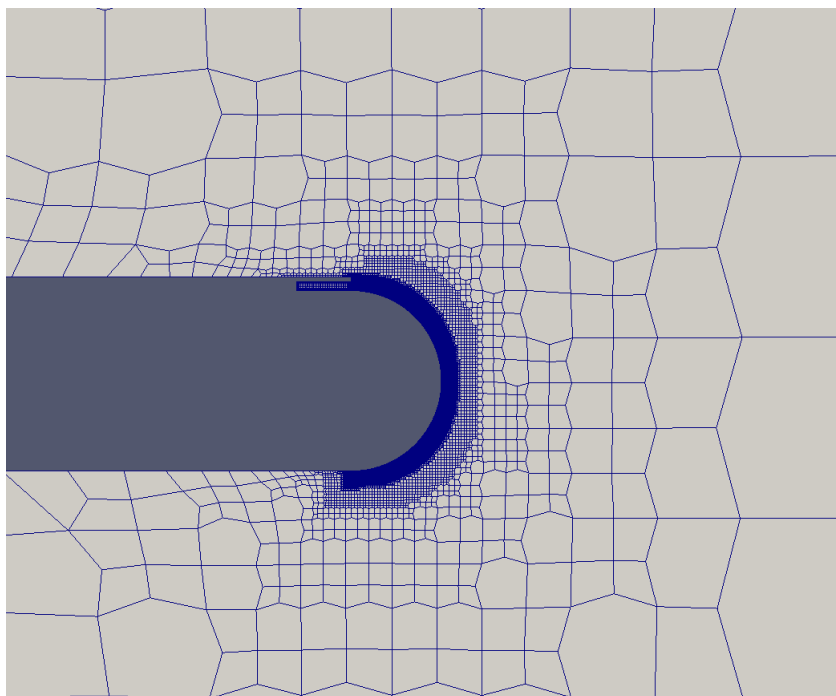
### 3.1 Mreža, rubni i početni uvjeti

Mreža je napravljena pomoću programa cfMesh na način da je prvo u Salome-u bilo potrebno napraviti rubove domene zatim se sa njima u cfMeshu generira mreža.

Početna diskretizacija mreže izgledala je za svaki slučaj isto, kako prikazuju iduće slike.

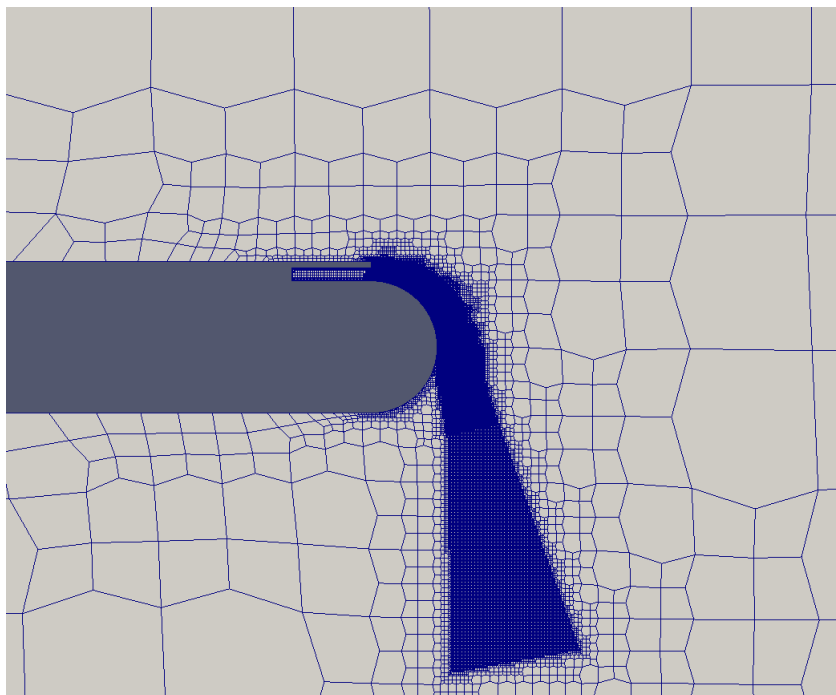


Slika 5. Diskretizacija područja



**Slika 6. Diskretizacija područja oko cilindra**

Tijekom simulacije pratio se mlaz i mreža se prilagođavala iznova svakim savijanjem mlaza, odnosno praćenjem traga kako bi simulacije bile što kvalitetnije.



**Slika 7. Prilagođavanje mreže tragu mlaza**

Mreže su ovisno u slučaju sadržavale od 15000 do 90000 volumena.

Kako su se simulacije vršile i za laminarno i za turbulentno strujanje tako su i rubni uvjeti drugačiji za pojedine simulacije. Rubni uvjeti dani su tablično u slijedećim tablicama:

	vrsta granice	<b>U</b>	<b>p</b>
kutija_1	patch	fixedValue	zeroGradient
kutija_2	patch	fixedValue	zeroGradient
ulaz	patch	fixedValue	zeroGradient
izlaz	patch	zeroGradient	zeroGradient
gore	wall	fixedValue	zeroGradient
dolje	wall	fixedValue	zeroGradient
stjenka_g	wall	fixedValue	zeroGradient
stjenka_d	wall	fixedValue	zeroGradient
gore_s	symmetry	symmetry	symmetry
dolje_s	symmetry	symmetry	symmetry

**Tablica 1. Granice i rubni uvjeti za laminarno strujanje**

	vrsta granice	<b>k</b>	<b>nut</b>	<b>omega</b>
ulaz	patch	fixedValue	calculated	fixedValue
izlaz	patch	zeroGradient	calculated	zeroGradient
kutija_1	wall	kqRWallFunction	nutUSpaldingWallFunction	omegaWallFunction
kutija_2	wall	kqRWallFunction	nutUSpaldingWallFunction	omegaWallFunction
gore	wall	kqRWallFunction	nutUSpaldingWallFunction	omegaWallFunction
dolje	wall	kqRWallFunction	nutUSpaldingWallFunction	omegaWallFunction
stjenka_g	wall	kqRWallFunction	nutUSpaldingWallFunction	omegaWallFunction
stjenka_d	wall	kqRWallFunction	nutUSpaldingWallFunction	omegaWallFunction
gore_s	symmetry	symmetry	symmetry	symmetry
dolje_s	symmetry	symmetry	symmetry	symmetry

**Tablica 2.** Granice i rubni uvjeti za turbulentno strujanje (za brzinu  $U$  i tlak  $p$  isto kao za laminarno)

Za početak numeričke simulacije potrebno je zadati početne uvjete, za laminarno strujanje to su tlak i brzina, na ulazu brzina  $U_{ul} = 1 \frac{m}{s}$  u području i na stjenkama  $U = 0 \frac{m}{s}$ , dok je u  $k-\omega$  SST modelu turbulencije potrebno zadati još i vrijednosti kinetičke energije turbulencije  $k$  i specifične energije disipacije  $\omega$ .

Kinetička energija se izračunava izrazom:

$$k = \frac{3}{2}(U \cdot I)^2 = 0,0003375 \frac{m^2}{s^2} \quad (3.2)$$

gdje je  $U$  vremenski osrednjena brzina u smjeru strujanja, u ovom slučaju brzina zadana na ulazu u iznosu  $1[m/s]$ , a  $I$  je intenzitet turbulencije za koju se najčešće i tako i ovdje uzima vrijednost od 1%.

Specifična brzina disipacije se izračunava izrazom:

$$\omega = \frac{\sqrt{k}}{C_\mu^{0,25} l} = 0,4472 s^{-1} \quad (3.3)$$

gdje je  $l$  duljinska mjera turbulencije, ovdje  $l = 0,05m$ , te  $C_\mu$  konstanta modela turbulencije koja iznosi 0,09.

Izračunate vrijednosti  $k$  i  $\omega$  se koriste kao ulazne vrijednosti za turbulenciju, kao početne



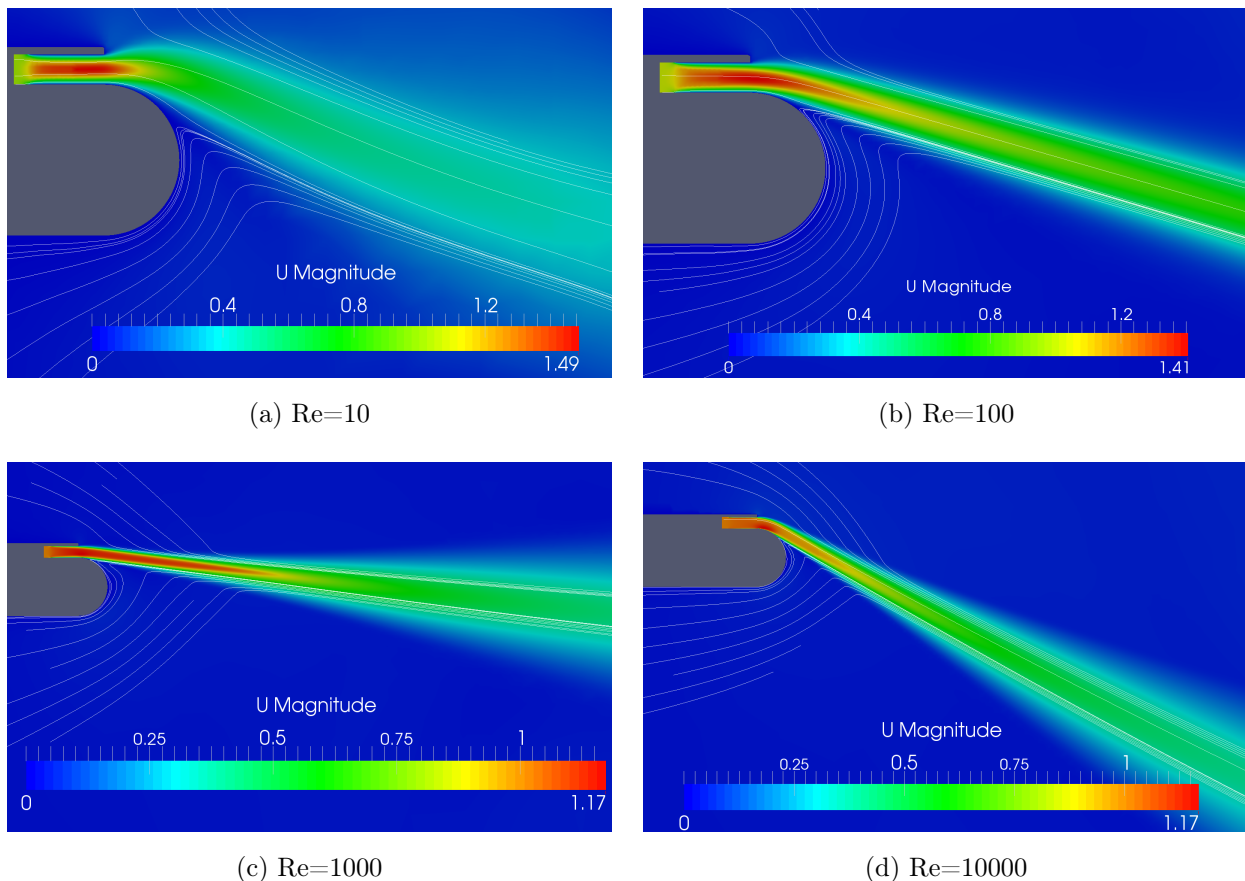
vrijednosti polja  $k$  i  $\omega$  te se zadaju i na ulazu. Vrijednost turbulentne viskoznosti na ulazu se izračunava iz polja drugih fizikalnih veličina.

### 3.2 Prikaz rezultata za omjer $\frac{h}{D} = \frac{1}{5}$

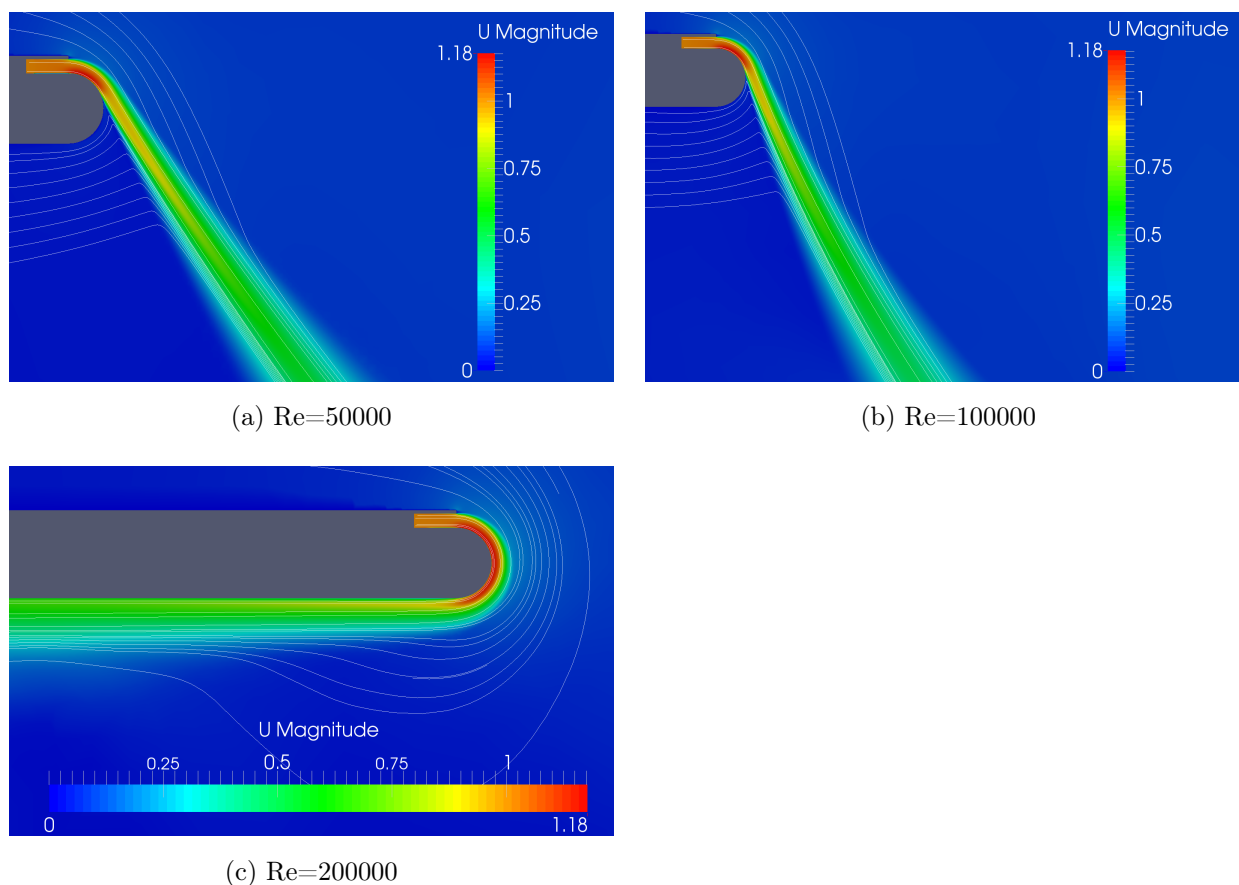
Potrebno je odrediti raspodjelu tlaka i smičnog naprezanja po površini cilindra te silu fluida na polucilindar i kut odvajanja strujanja.

Visina mlaza  $h$  je 1 metar, a promjer cilindra  $D$  je 5 metara. Reynoldsov broj mjerio se spram ulazne visine mlaza  $h = 1\text{m}$  i ulazne brzine  $U_{ul} = 1\frac{\text{m}}{\text{s}}$  koji su držani konstantnima, a mijenjana je kinematička viskoznost  $\nu$  ovisno o  $Re$  koji se htio dobiti.

Na idućim slikama dano je polje brzina u okolini cilindra sa nekoliko strujnica kako bi se prikazalo i povlačenje okolišnog fluida u mlaz.

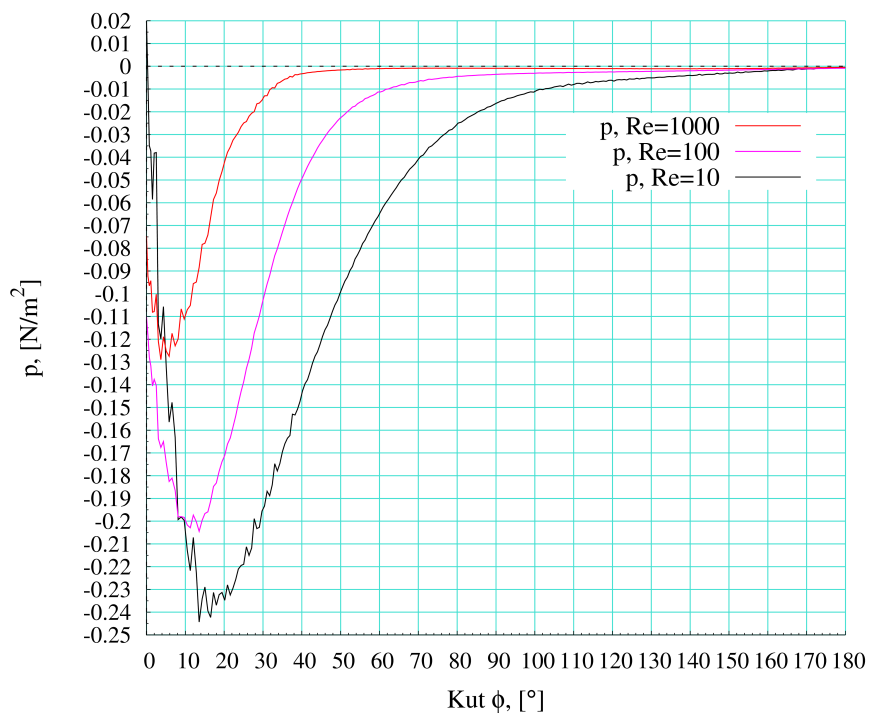


**Slika 8.** Polje brzina za  $Re: 10, 100, 1000, 10000$ , slučaj  $\frac{h}{D} = \frac{1}{5}$

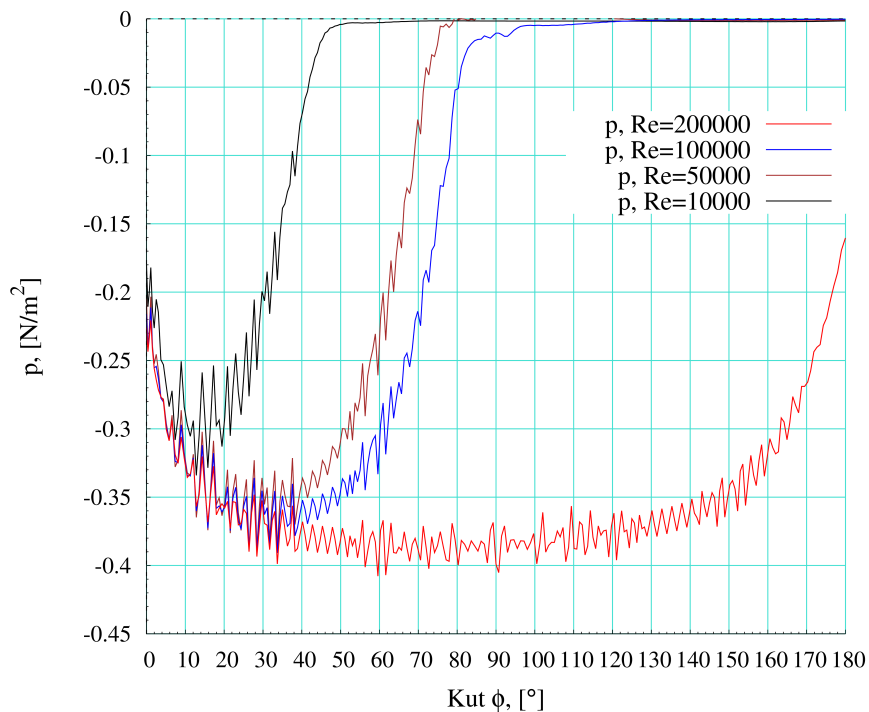


Slika 9. Polje brzina za  $Re$ : 50000, 100000, 2000000, slučaj  $\frac{h}{D} = \frac{1}{5}$

Dalje na slikama dan je prikaz tlaka i smičnih naprezanja na cilindru.

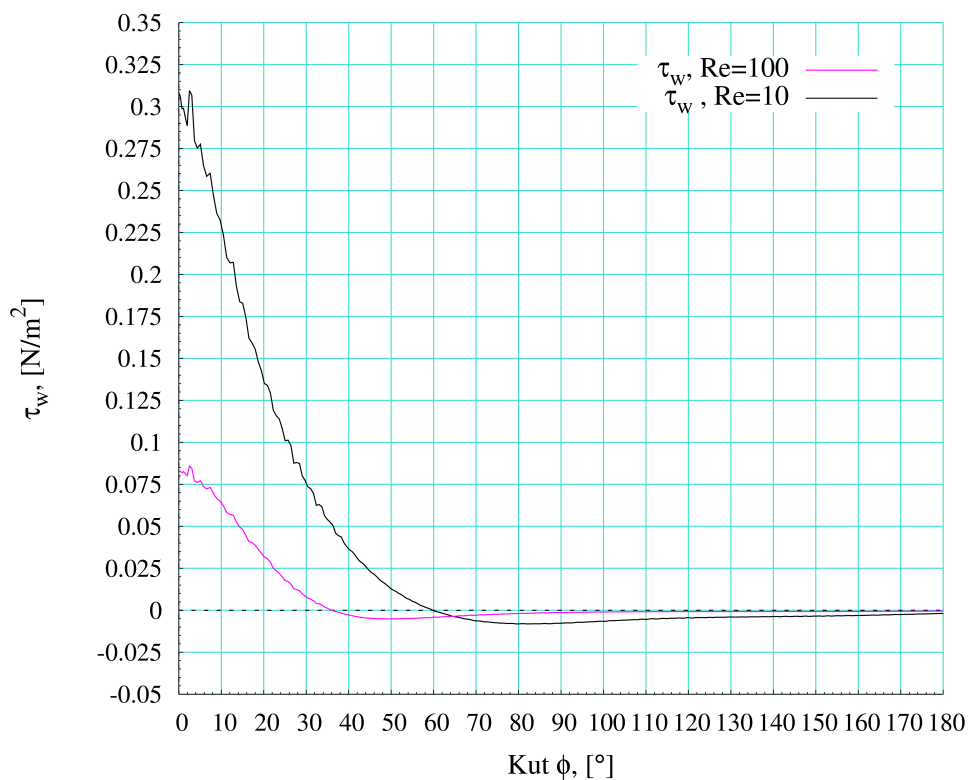


(a) Tlak  $p$  za  $Re$ : 10, 100, 1000

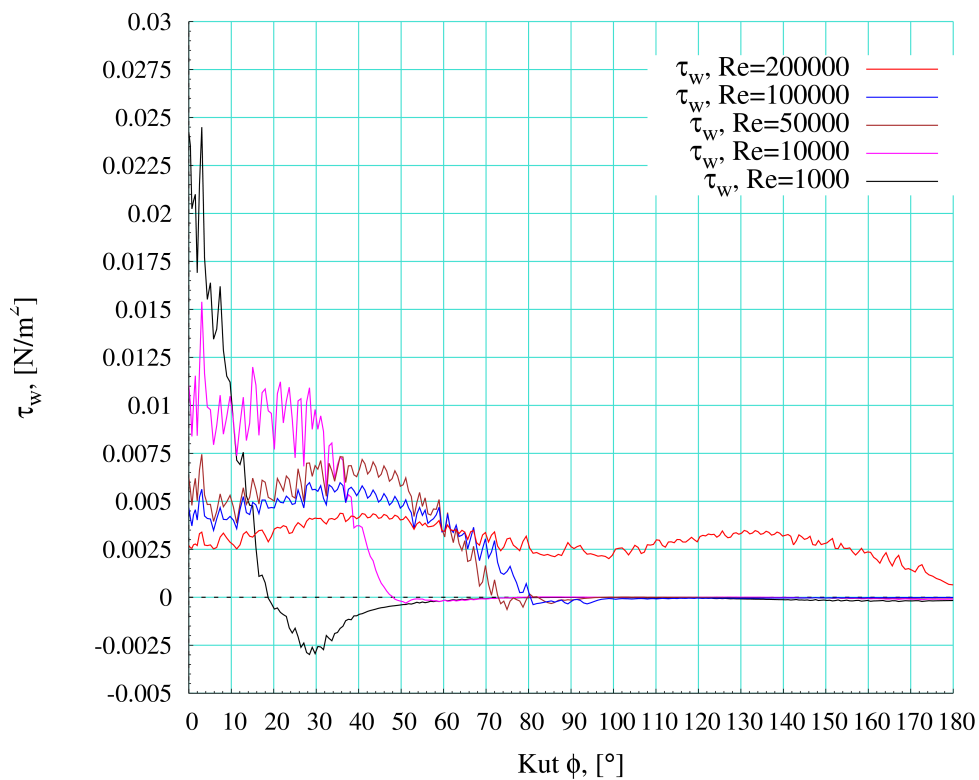


(b) Tlak  $p$  za  $Re$ : 10000, 50000, 100000, 200000

**Slika 10. Raspodjela tlaka po cilindru spram kuta  $\phi$ , slučaj  $\frac{h}{D} = \frac{1}{5}$**



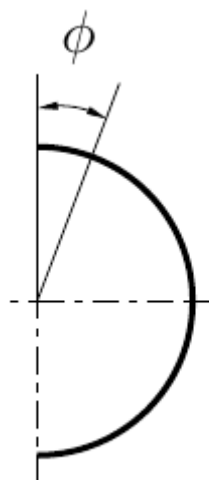
(a) Smična naprežanja za Re: 10, 100



(b) Smična naprežanja za Re: 1000, 10000, 50000, 100000, 200000

**Slika 11. Raspodjela smičnih naprežanja po cilindru, slučaj  $\frac{h}{D} = \frac{1}{5}$**

Nadalje tablično i dijagramski će se prikazati prvo koeficijent otpora na cilindar,  $C_D$ , koeficijent uzgona na cilindar,  $C_L$ , te kut odvajanja  $\phi$  koji je definiran na slici 12.

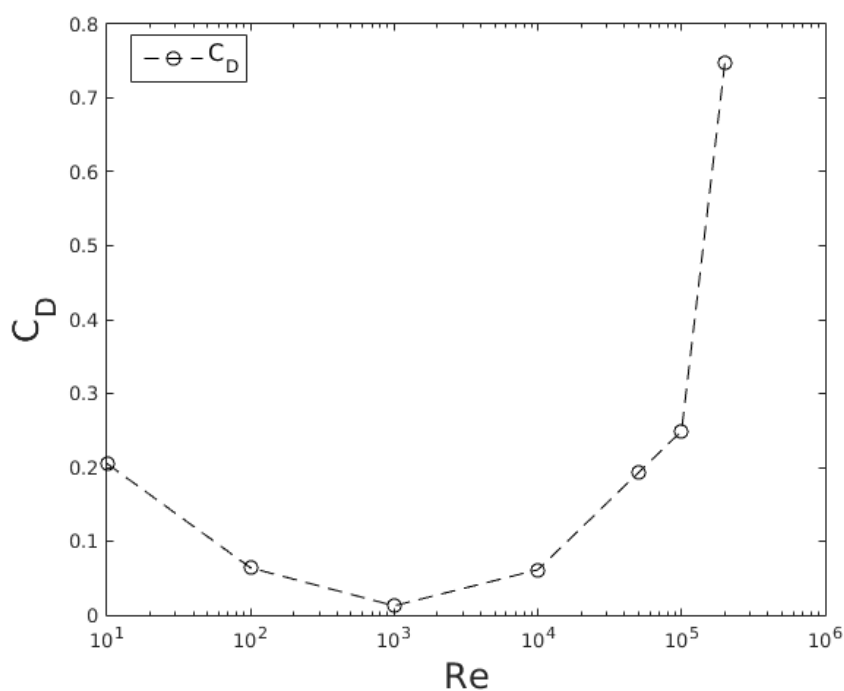


Slika 12. Definicija kuta  $\phi$

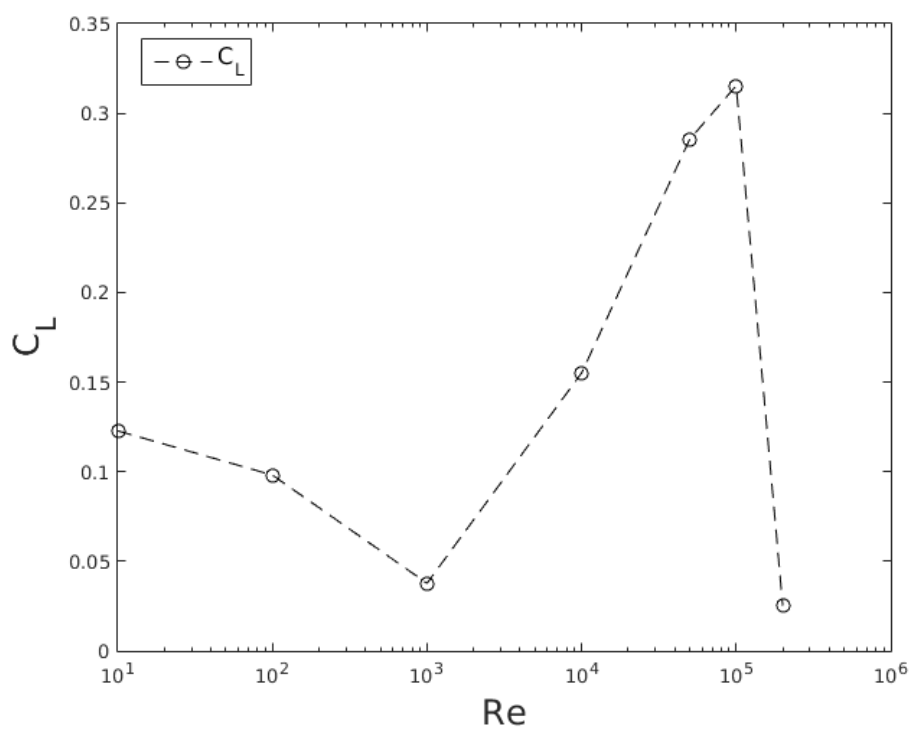
Re	$C_D$	$C_L$	$\phi$ , [°]
10	0,2051219	0,1227991	59,61
100	0,0639254	0,0981337	36,3
1000	0,0126027	0,0377455	17,983
10000	0,0613456	0,155079	47,249
50000	0,1926477	0,285466	73,578
100000	0,2491098	0,315346	80,283
200000	0,746895	0,0251809	180

Tablica 3. Vrijednosti koef. otpora i uzgona te kuta odvajanja o Reynoldsovom broju, slučaj  $\frac{h}{D} = \frac{1}{5}$

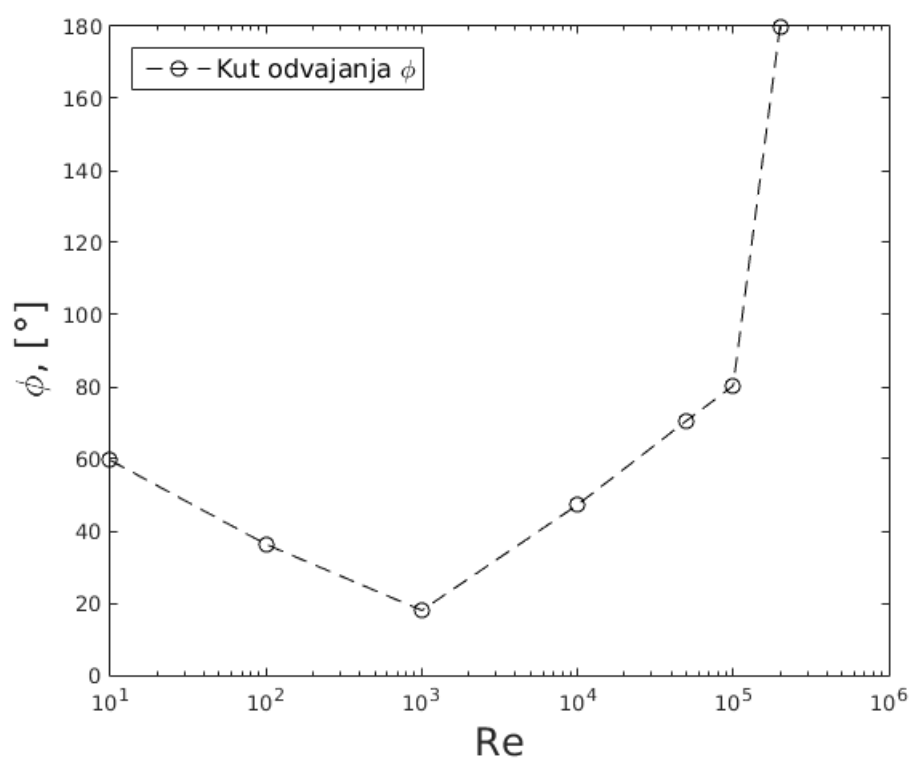
Na idućim slikama dan je grafički prikaz ovisnosti gdje je os apscisa koja prikazuje Reynoldsove brojeve u logaritmičkom mjerilu, sa dekadskom bazom, radi jednostavnijeg i preglednijeg prikaza.



Slika 13. Ovisnost koef. otpora  $C_D$  o Reynoldsovom broju, slučaj  $\frac{h}{D} = \frac{1}{5}$



Slika 14. Ovisnost koef. uzgona  $C_L$  o Reynoldsovom broju, slučaj  $\frac{h}{D} = \frac{1}{5}$



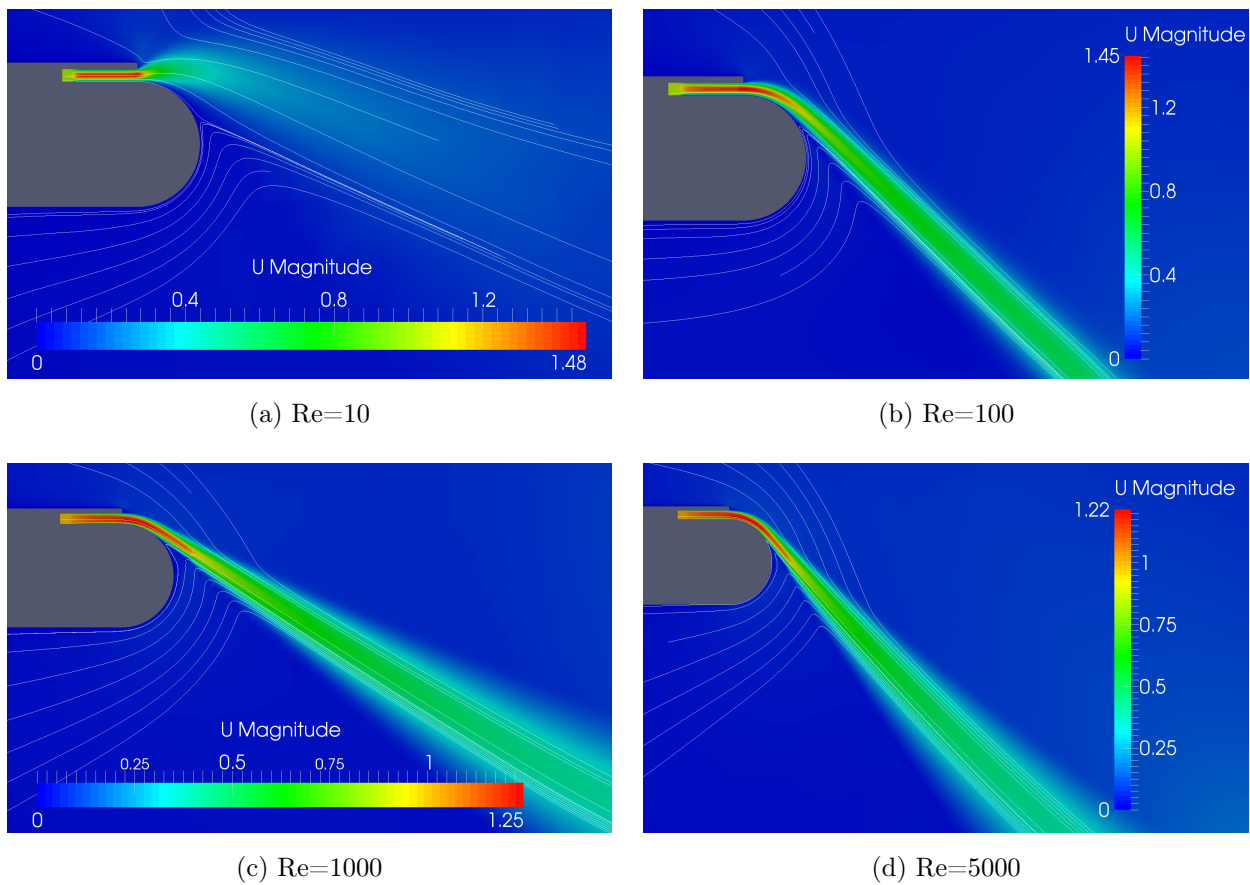
Slika 15. Ovisnost kuta odvajanja strujanja  $\phi$  o Reynoldsovom broju, slučaj

$$\frac{h}{D} = \frac{1}{5}$$

### 3.3 Prikaz rezultata za omjer $\frac{h}{D} = \frac{1}{10}$

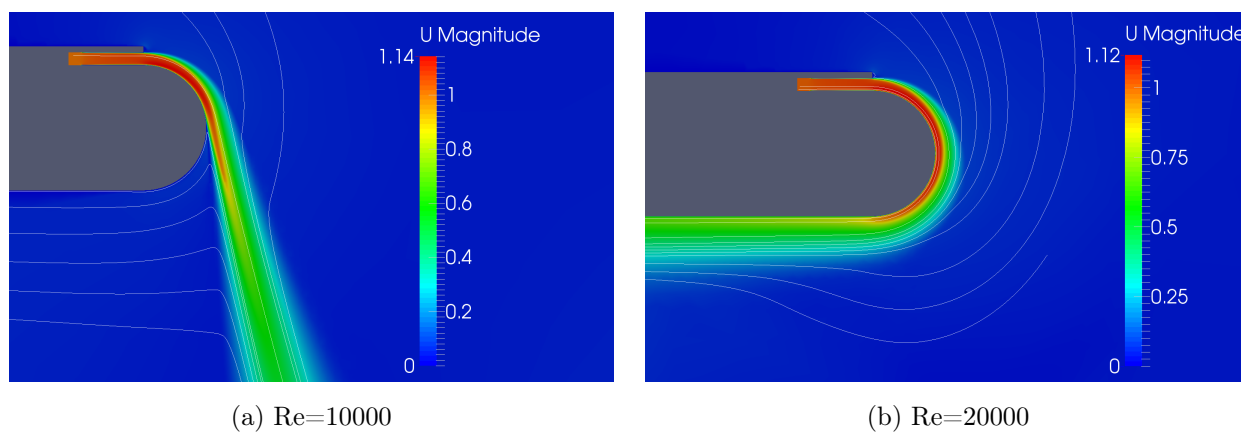
Visina mlaza  $h$  je 1 metar, a promjer cilindra  $D$  je 10 metara. Reynoldsov broj mjerio se spram ulazne visine mlaza  $h = 1\text{m}$  i ulazne brzine  $U_{ul} = 1\frac{\text{m}}{\text{s}}$  koji su držani konstantnima, a mijenjana je kinematička viskoznost  $\nu$  ovisno o  $Re$  koji se htio dobiti.

Na idućim slikama dano je polje brzina u okolini cilindra sa nekoliko strujnica kako bi se prikazalo i povlačenje okolišnog fluida u mlaz.



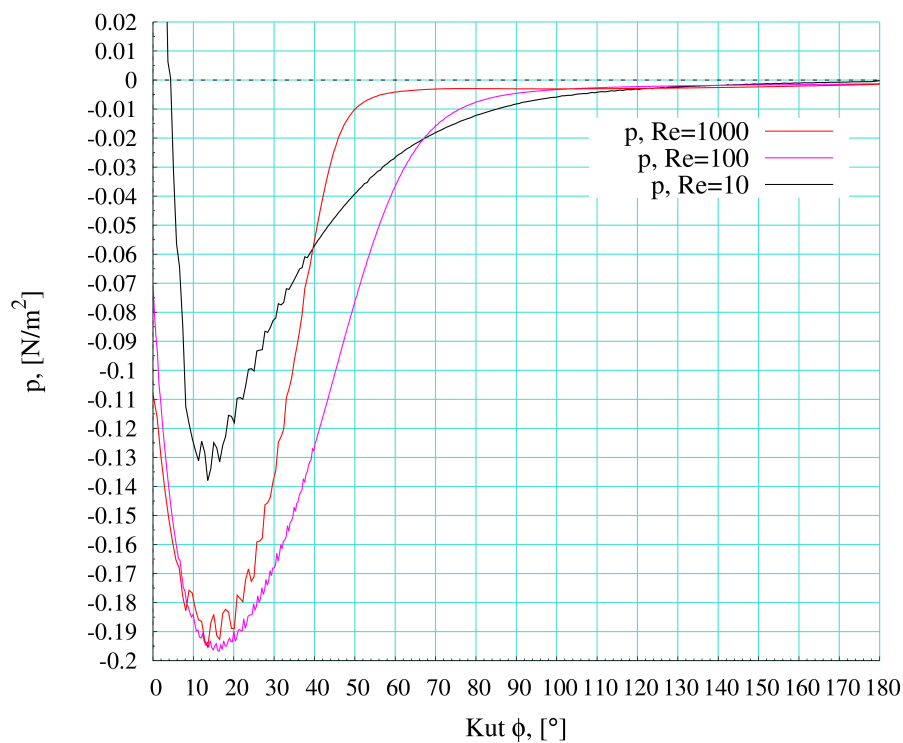
Slika 16. Polje brzina za  $Re$ : 10, 100, 1000, 5000, slučaj  $\frac{h}{D} = \frac{1}{10}$



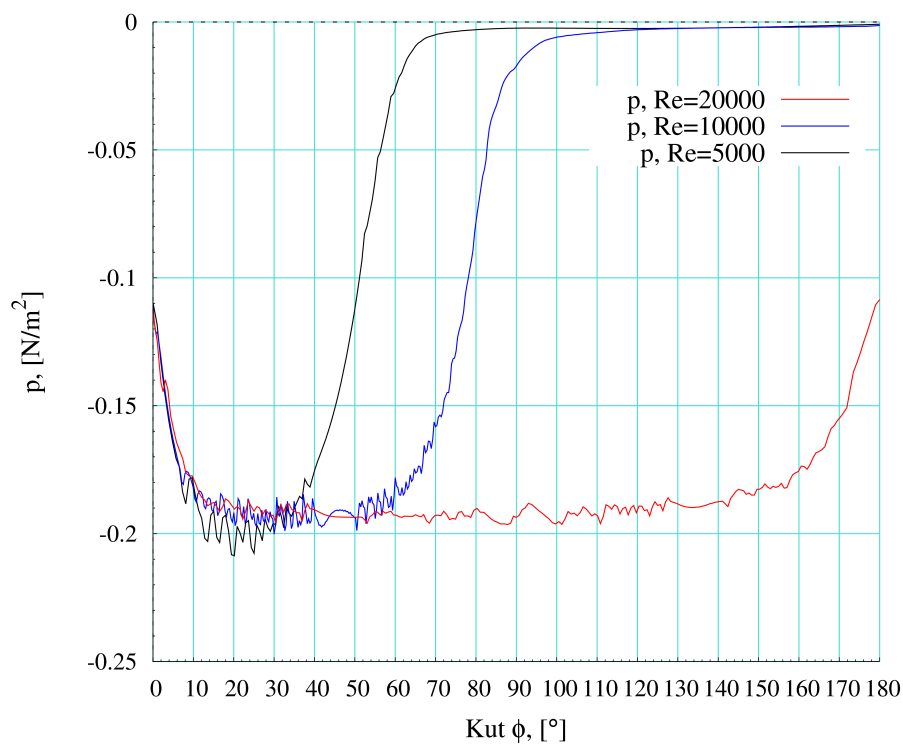


Slika 17. Polje brzina za Re: 10000, 20000, slučaj  $\frac{h}{D} = \frac{1}{10}$

Dalje na slikama dan je prikaz tlaka i smičnih naprezanja po cilindru.

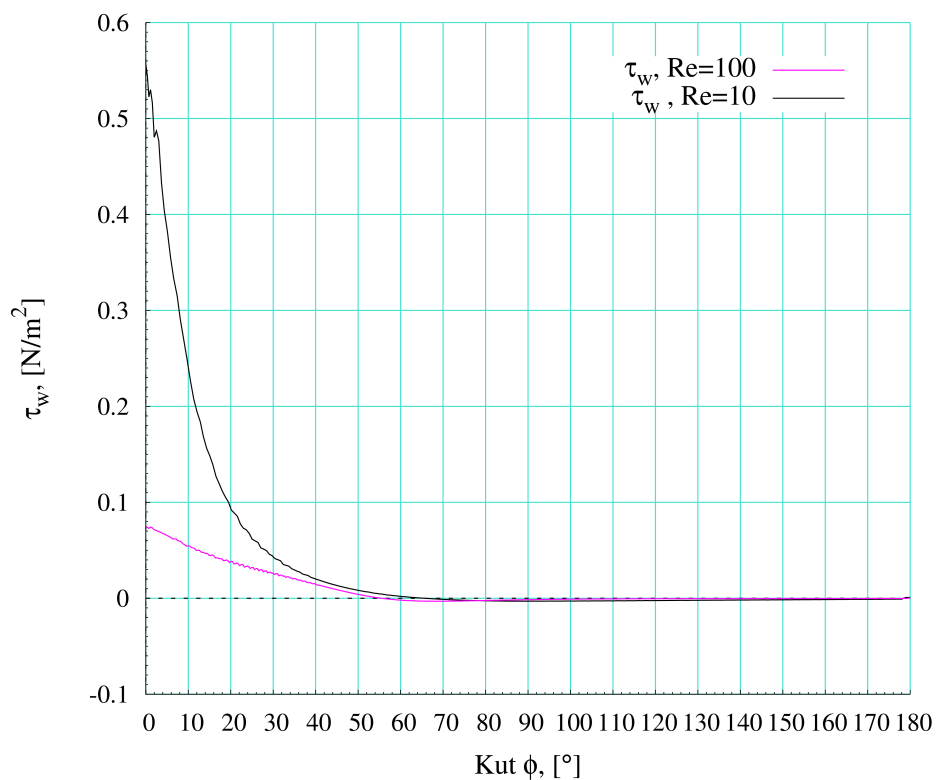


(a) Tlak  $p$  za  $Re$ : 10, 100, 1000

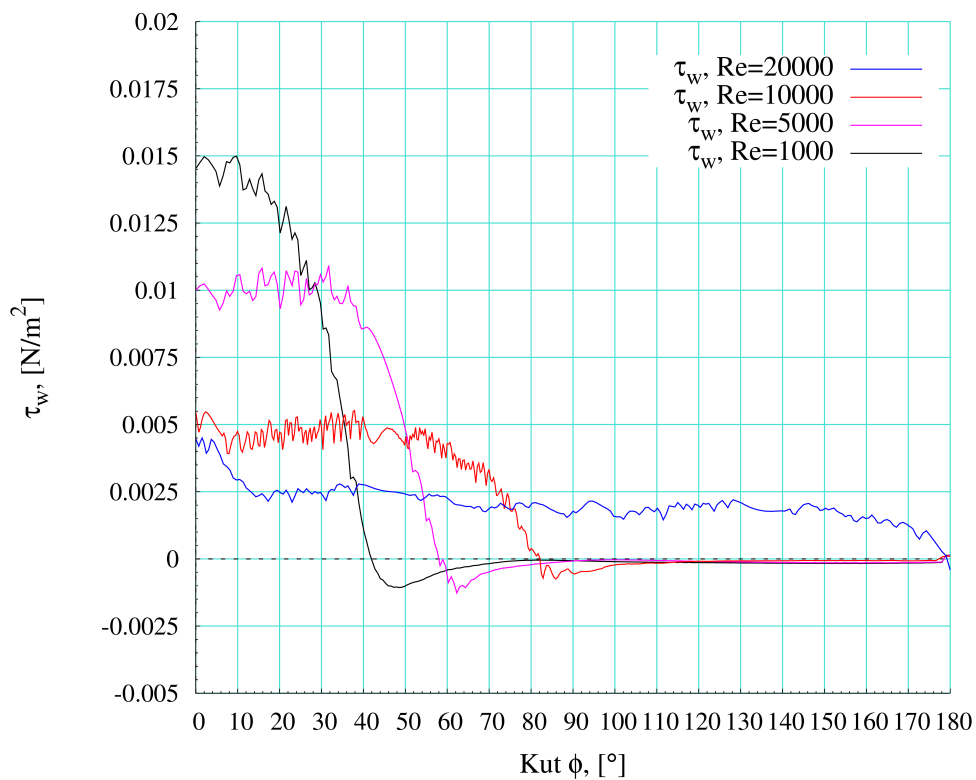


(b) Tlak  $p$  za  $Re$ : 5000, 10000, 20000

**Slika 18.** Raspodjela tlaka po cilindru spram kuta  $\phi$ , slučaj  $\frac{h}{D} = \frac{1}{10}$



(a) Smična naprezanja za Re: 10, 100



(b) Smična naprezanja za Re: 1000, 5000, 10000, 20000

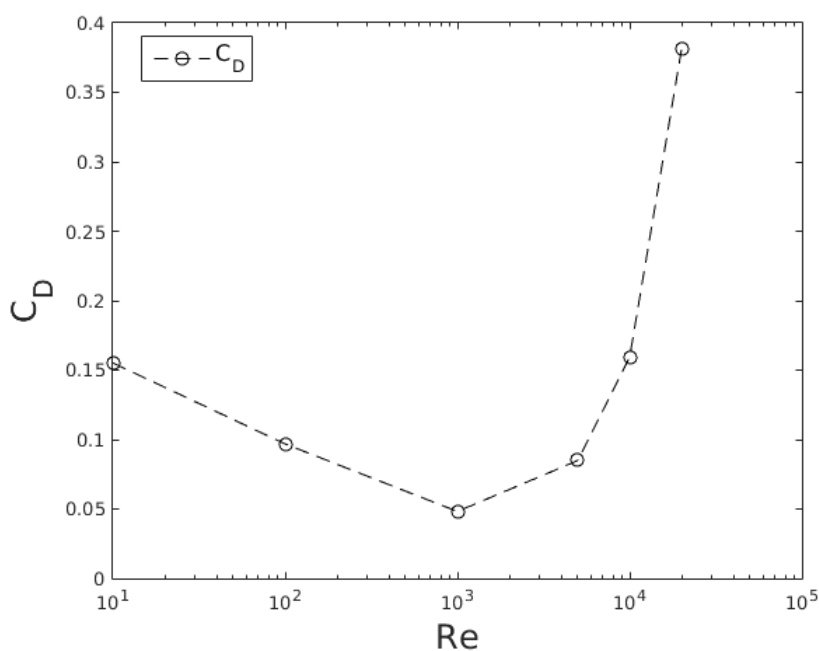
**Slika 19. Raspodjela smičnih naprezanja po cilindru, slučaj  $\frac{h}{D} = \frac{1}{10}$**

Nadalje tablično i dijagramski će se prikazati prvo koeficijent otpora na cilindar,  $C_D$ , koeficijent uzgona na cilindar,  $C_L$ , te kut odvajanja  $\phi$  koji je definiran na slici 12.

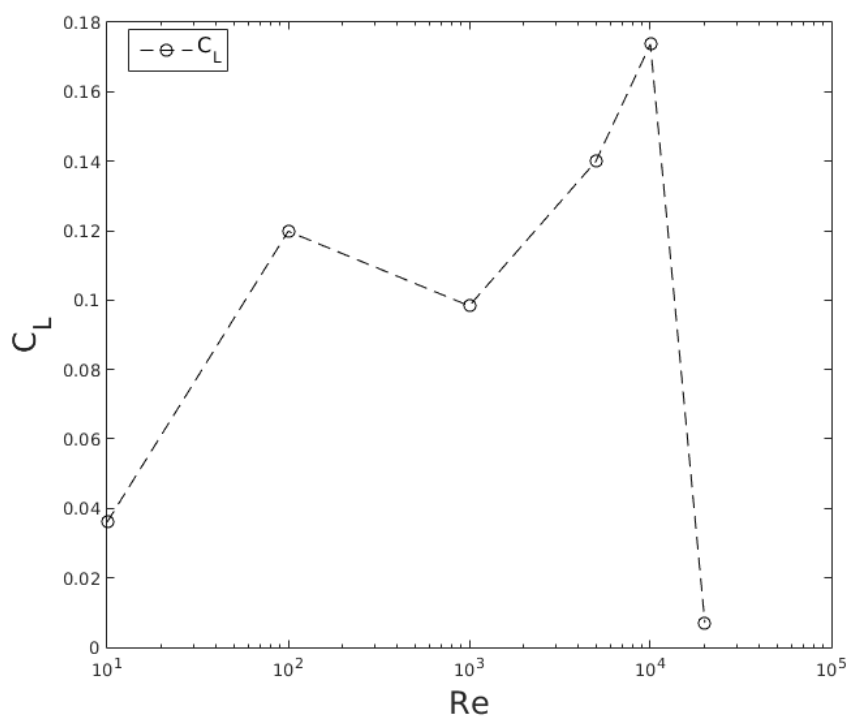
Re	$C_D$	$C_L$	$\phi$ , [°]
10	0,155137	0,0360658	65,685
100	0,0968362	0,119811	55,376
1000	0,048209	0,0983423	41,461
5000	0,0849202	0,1399494	57,618
10000	0,159327	0,173708	82,069
20000	0,381022	0,007097	180

**Tablica 4. Vrijednosti koef. otpora i uzgona te kuta odvajanja o Reynoldsovom broju, slučaj  $\frac{h}{D} = \frac{1}{10}$**

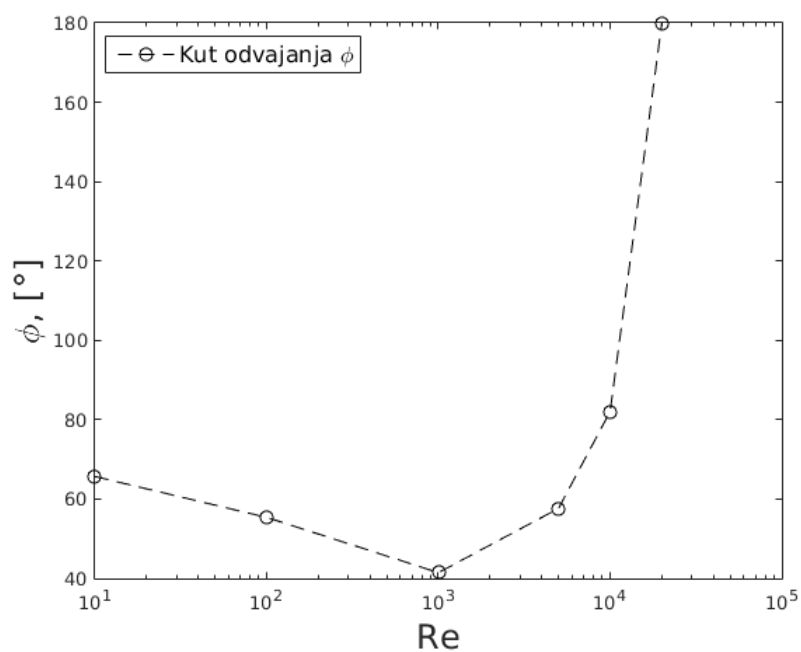
Na idućim slikama dan je grafički prikaz ovisnosti gdje je os apscisa koja prikazuje Reynoldsove brojeve u logaritmičkom mjerilu, sa dekadskom bazom, radi jednostavnijeg i preglednijeg prikaza.



**Slika 20. Ovisnost koef. otpora  $C_D$  o Reynoldsovom broju, slučaj  $\frac{h}{D} = \frac{1}{10}$**



Slika 21. Ovisnost koef. uzgona  $C_L$  o Reynoldsovom broju, slučaj  $\frac{h}{D} = \frac{1}{10}$

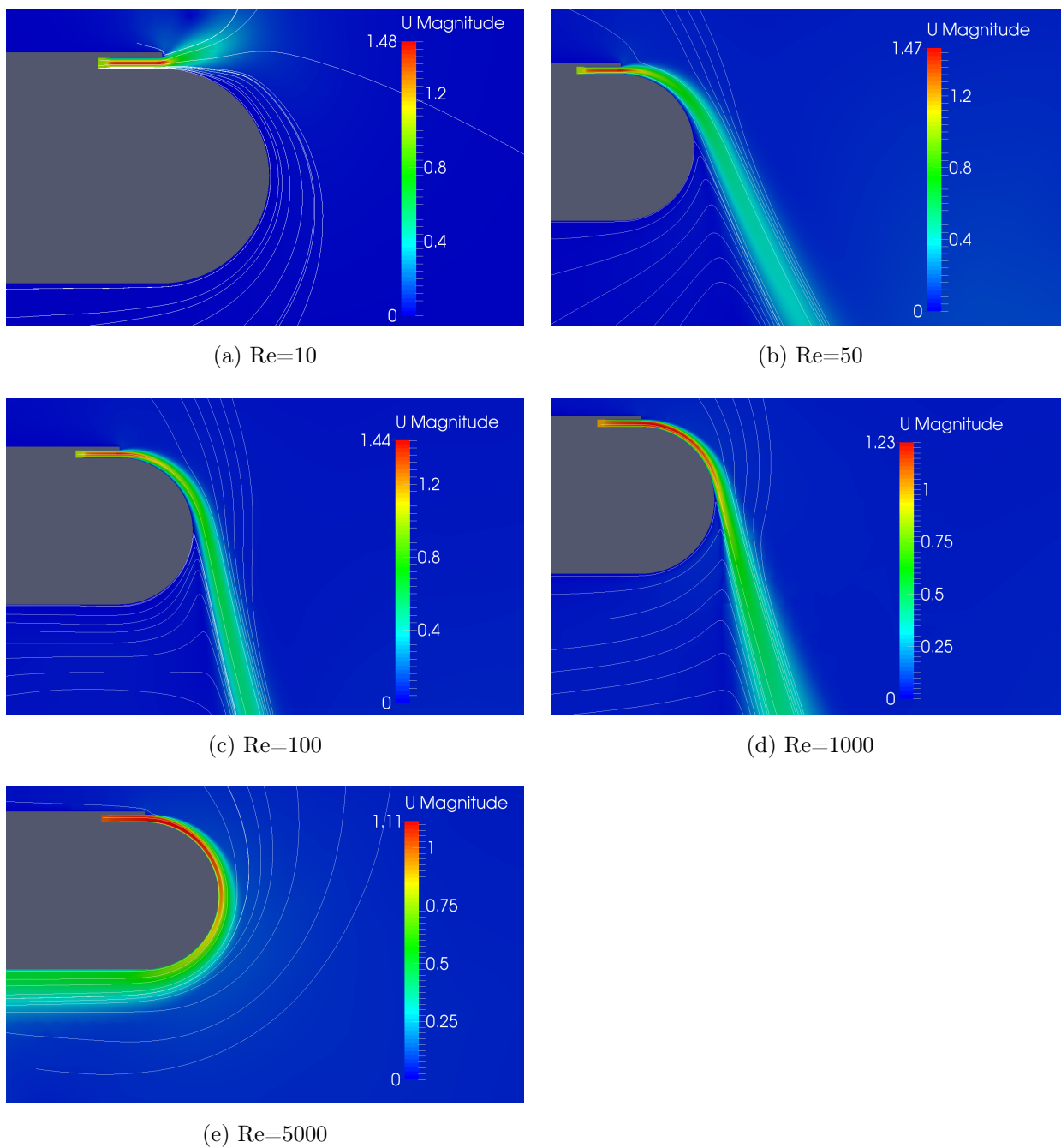


Slika 22. Ovisnost kuta odvajanja strujanja  $\phi$  o Reynoldsovom broju, slučaj  $\frac{h}{D} = \frac{1}{10}$

### 3.4 Prikaz rezultata za omjer $\frac{h}{D} = \frac{1}{20}$

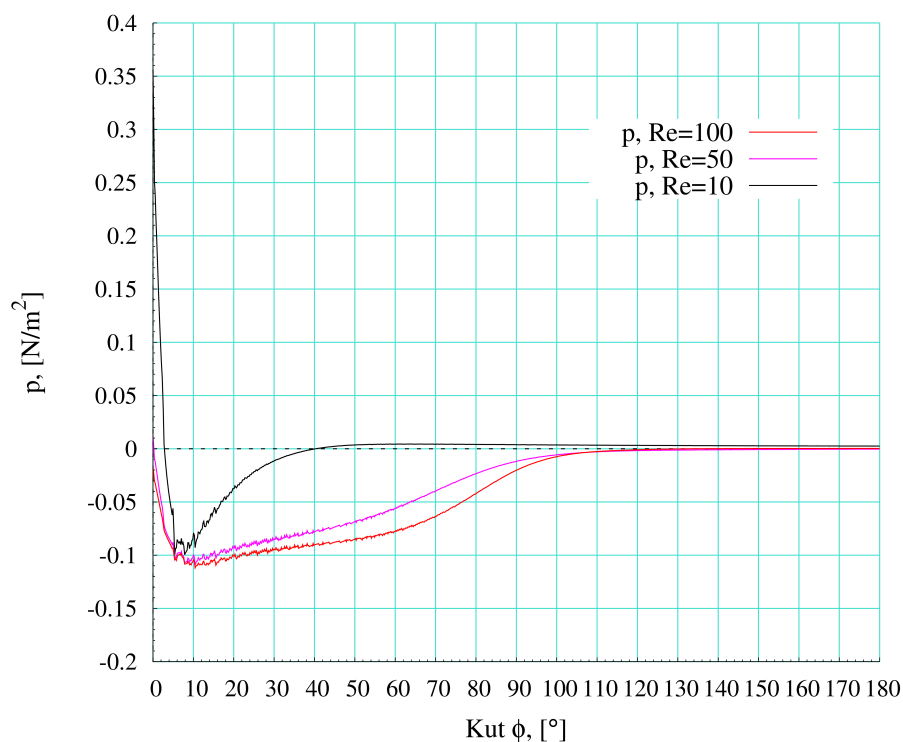
Visina mlaza  $h$  je 1 metar, a promjer cilindra  $D$  je 20 metara. Reynoldsov broj mjerio se spram ulazne visine mlaza  $h = 1\text{m}$  i ulazne brzine  $U_{ul} = 1\frac{\text{m}}{\text{s}}$  koji su držani konstantnima, a mijenjana je kinematička viskoznost  $\nu$  ovisno o  $Re$  koji se htio dobiti.

Na idućim slikama dano je polje brzina u okolini cilindra sa nekoliko strujnica kako bi se prikazalo i povlačenje okolišnog fluida u mlaz.

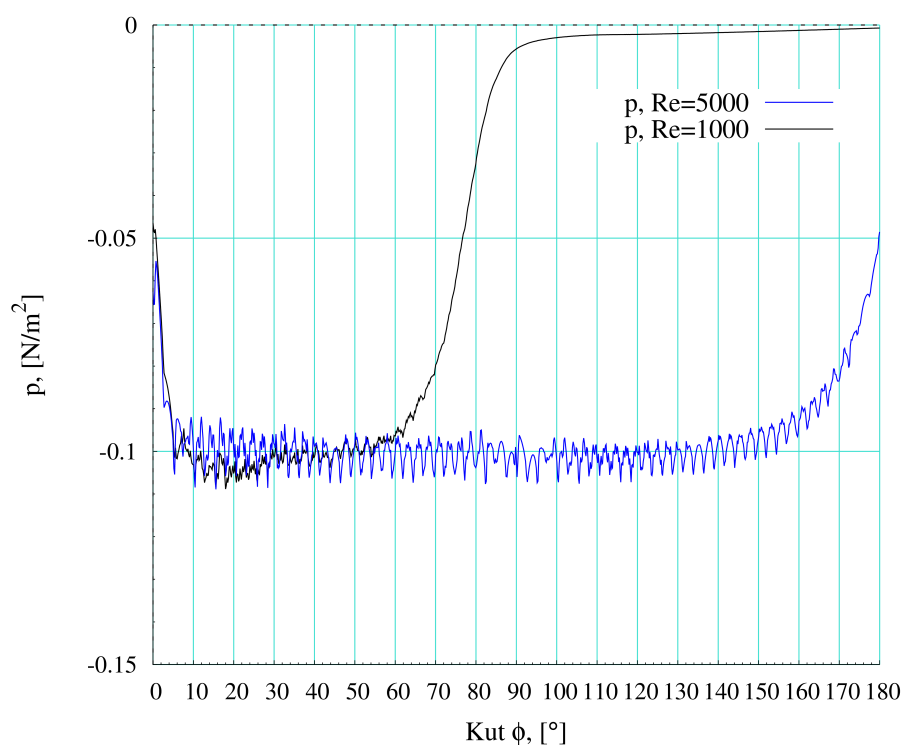


**Slika 23.** Polje brzina za  $Re$ : 10, 50, 100, 1000, 5000, slučaj  $\frac{h}{D} = \frac{1}{20}$

Dalje na slikama dan je prikaz tlaka i smičnih naprezanja po cilindru.



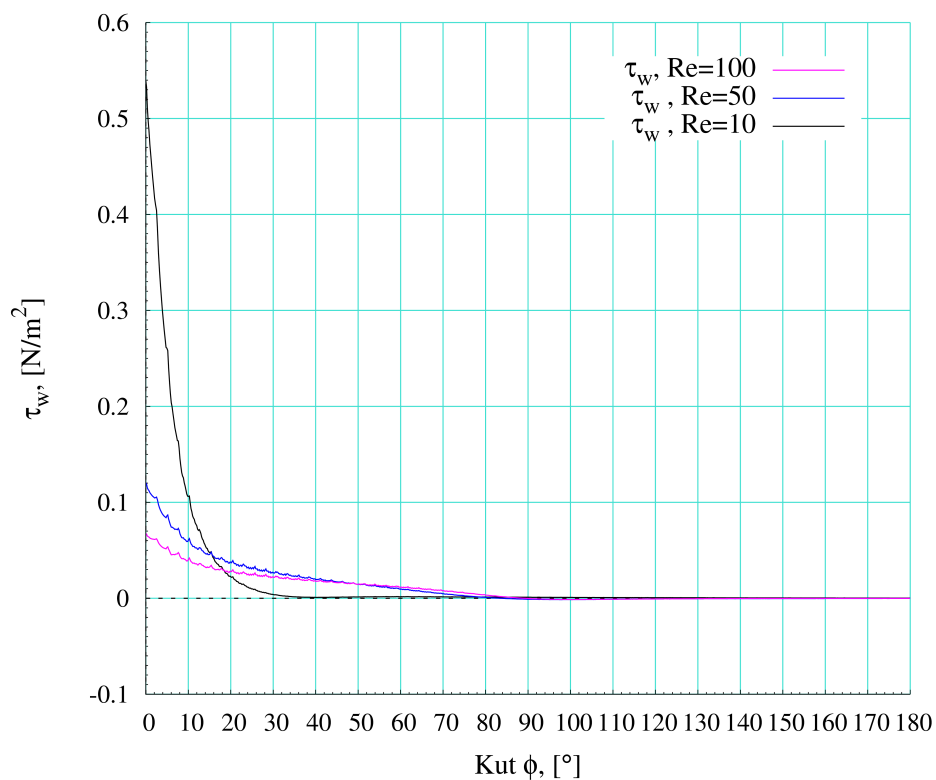
(a) Tlak  $p$  za  $Re$ : 10, 50, 100



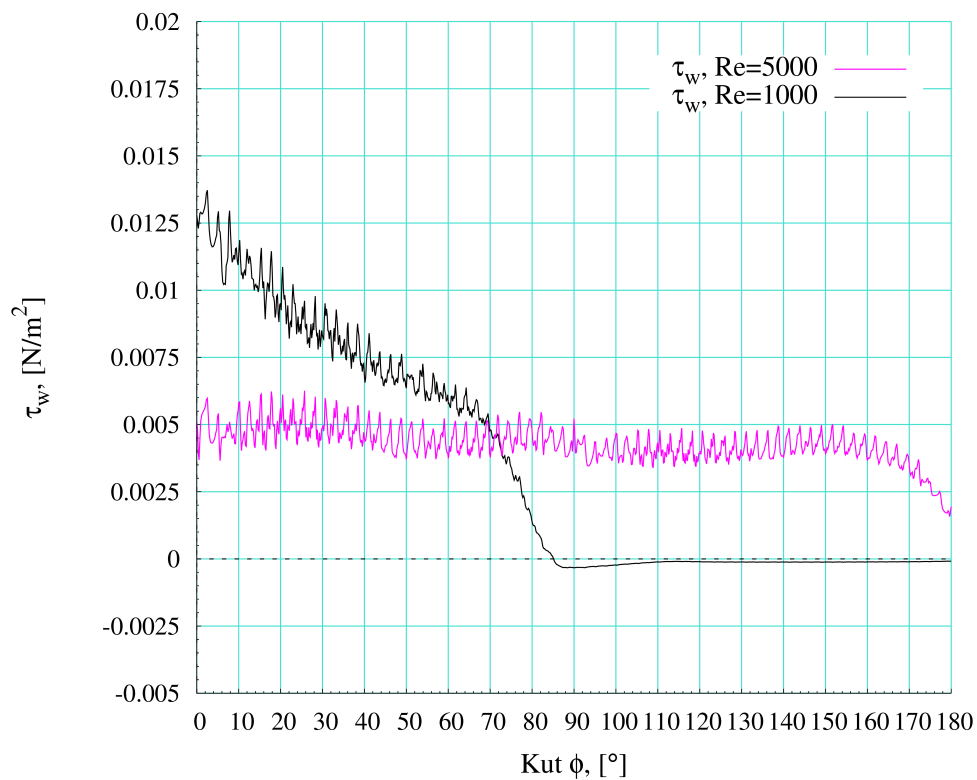
(b) Tlak  $p$  za  $Re$ : 1000, 5000

Slika 24. Raspodjela tlaka po cilindru spram kuta  $\phi$ , slučaj  $\frac{h}{D} = \frac{1}{20}$





(a) Smična naprezanja za Re: 10, 50, 100



(b) Smična naprezanja za Re: 1000, 5000

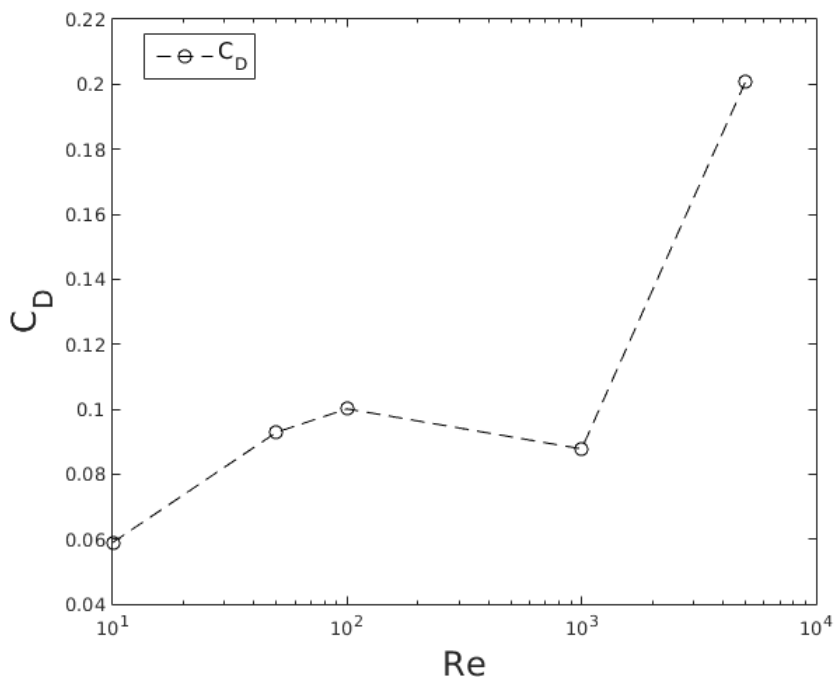
**Slika 25.** Raspodjela smičnih naprezanja po cilindru, slučaj  $\frac{h}{D} = \frac{1}{20}$

Nadalje tablično i dijagramski će se prikazati prvo koeficijent otpora na cilindar,  $C_D$ , koeficijent uzgona na cilindar,  $C_L$ , te kut odvajanja  $\phi$  koji je definiran na slici 12.

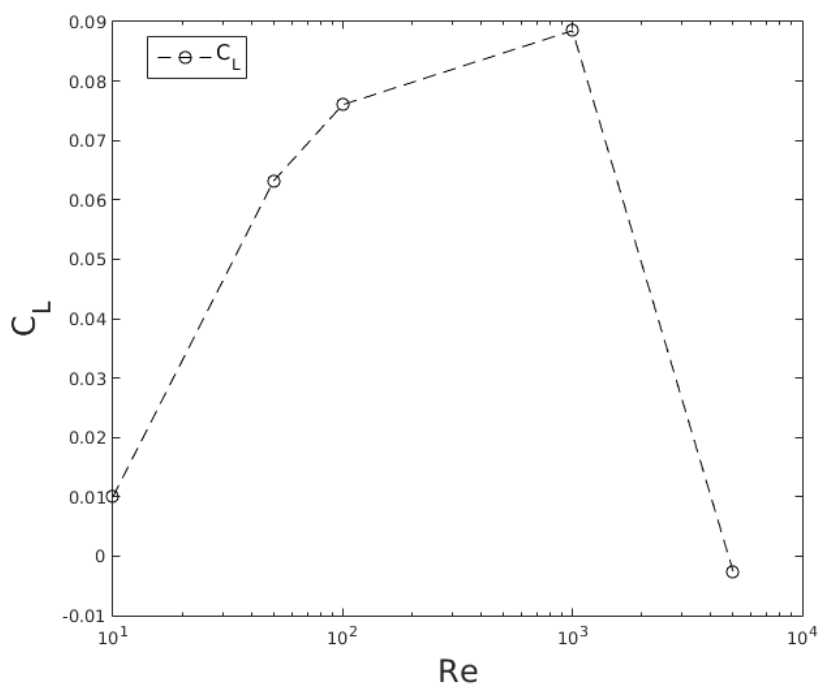
Re	$C_D$	$C_L$	$\phi$ , [°]
10	0,0589545	0,00999965	180
50	0,0929118	0,06318525	83.59
100	0,1000076	0,0760182	89.253
1000	0,08775555	0,088493045	85.04
5000	0,20083045	-0,0025699	180

**Tablica 5.** Vrijednosti koef. otpora i uzgona te kuta odvajanja o Reynoldsovom broju, slučaj  $\frac{h}{D} = \frac{1}{20}$

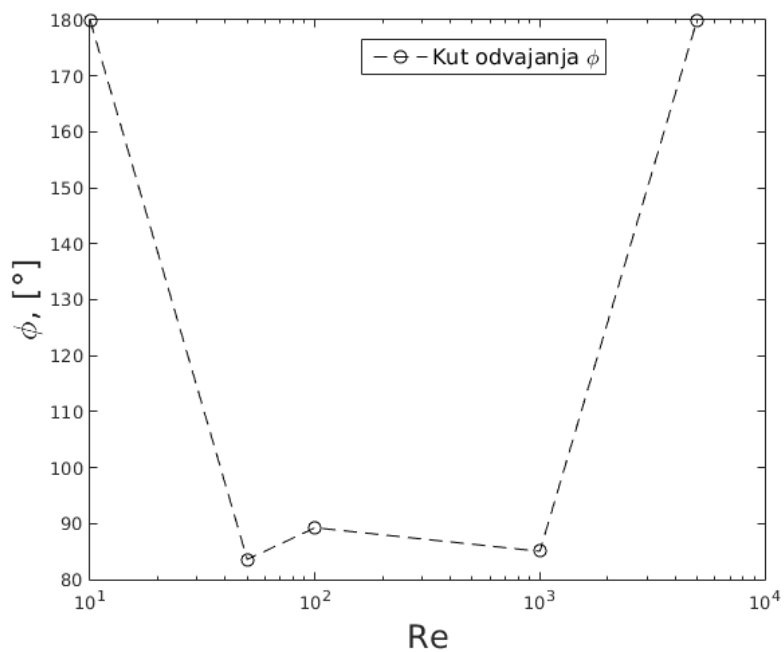
Na idućim slikama dan je grafički prikaz ovisnosti gdje je os apscisa koja prikazuje Reynoldsove brojeve u logaritmičkom mjerilu, sa dekadskom bazom, radi jednostavnijeg i preglednijeg prikaza.



**Slika 26.** Ovisnost koef. otpora  $C_D$  o Reynoldsovom broju, slučaj  $\frac{h}{D} = \frac{1}{20}$



Slika 27. Ovisnost koef. uzgona  $C_L$  o Reynoldsovom broju, slučaj  $\frac{h}{D} = \frac{1}{20}$



Slika 28. Ovisnost kuta odvajanja strujanja  $\phi$  o Reynoldsovom broju, slučaj  $\frac{h}{D} = \frac{1}{20}$

## 4 Analiza rezultata

Potrebno je analizirati utjecaj debljine mlaza i Reynoldsova broja na sile na cilindar i na kut odvajanja strujanja.

Prvo će se analizirati koeficijent otpora  $C_D$ , koeficijenti su definirani izrazima (3.1).

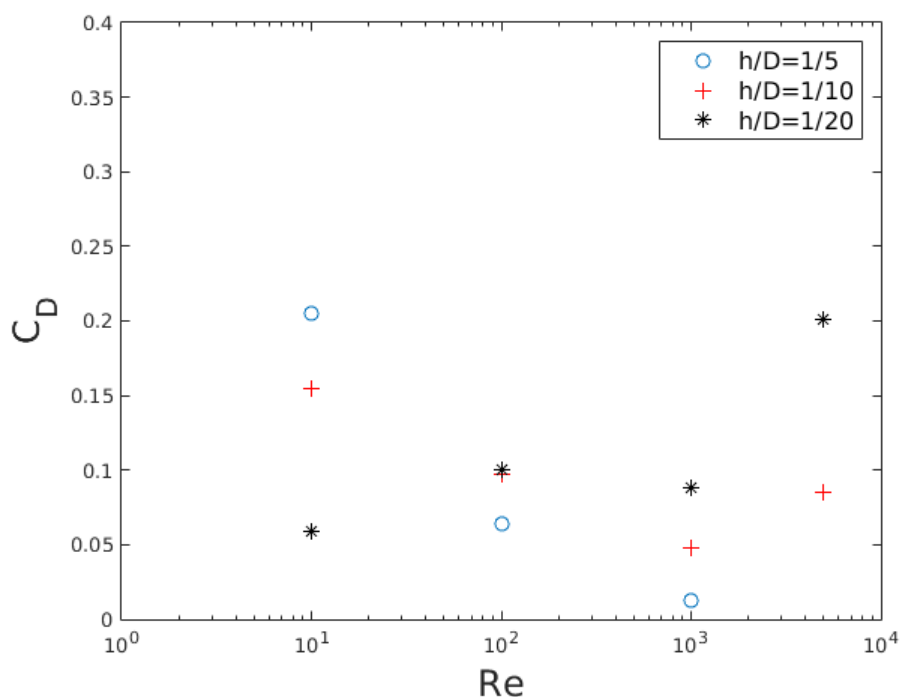
Iz tablica 3, 4, 5 kao i na slikama 13, 20 i 26 vidljivo je da vrijednost koeficijenta otpora raste sa Reynoldsovim brojem pri višim Reynoldsovim brojevima, turbulentna strujanja ( $Re > 1000$ ), a opada sa porastom Reynoldsovih brojeva pri laminarnim strujanjima osim u slučaju omjera debljine mlaza i promjera cilindra  $\frac{h}{D} = \frac{1}{20}$  gdje se mlaz za  $Re = 10$  zaokrenuo za 180 stupnjeva pa je  $C_D$  porastom  $Re$  rastao.

Utjecaj debljine mlaza na koeficijent otpora prikazan je tablično u idućoj tablici usporedbom za zajedničke Reynoldsove brojeve,  $Re$ : 10, 100, 1000, 5000.

<b>Re</b>	10	100	1000	5000
$C_D, \frac{h}{D} = \frac{1}{5}$	0,2051219	0,0639254	0,0126027	–
$C_D, \frac{h}{D} = \frac{1}{10}$	0,155137	0,096862	0,048209	0,0849202
$C_D, \frac{h}{D} = \frac{1}{20}$	0,0589545	0,1000076	0,08775555	0,20083045

**Tablica 6. Usporedba koeficijenta otpora,  $C_D$**

Vidljivo je da za  $Re = 10$   $C_D$  smanjenjem omjera opada, a za više  $Re$  raste. Grafička usporedba dana je na idućoj slici.



Slika 29. Usporedba koef. otpora  $C_D$

Koeficijent uzgona,  $C_L$ , za  $\frac{h}{D} = \frac{1}{5}$  i  $\frac{h}{D} = \frac{1}{10}$  opada sa porastom  $Re$  za  $Re \leq 1000$ , iznimno za slučaj  $\frac{h}{D} = \frac{1}{10}$  gdje je za  $Re = 100$  veći nego za  $Re = 10$ . Za te iste  $Re$ ,  $Re \leq 1000$ , za  $\frac{h}{D} = \frac{1}{20}$ , koeficijent uzgona raste. Za  $Re > 1000$ , turbulentna strujanja, u svim slučajevima  $C_L$  raste povećanjem  $Re$  za kut odvajanja  $\phi < 90$ , a nakon toga opada što se može zaključiti iz zakona dinamike fluida.

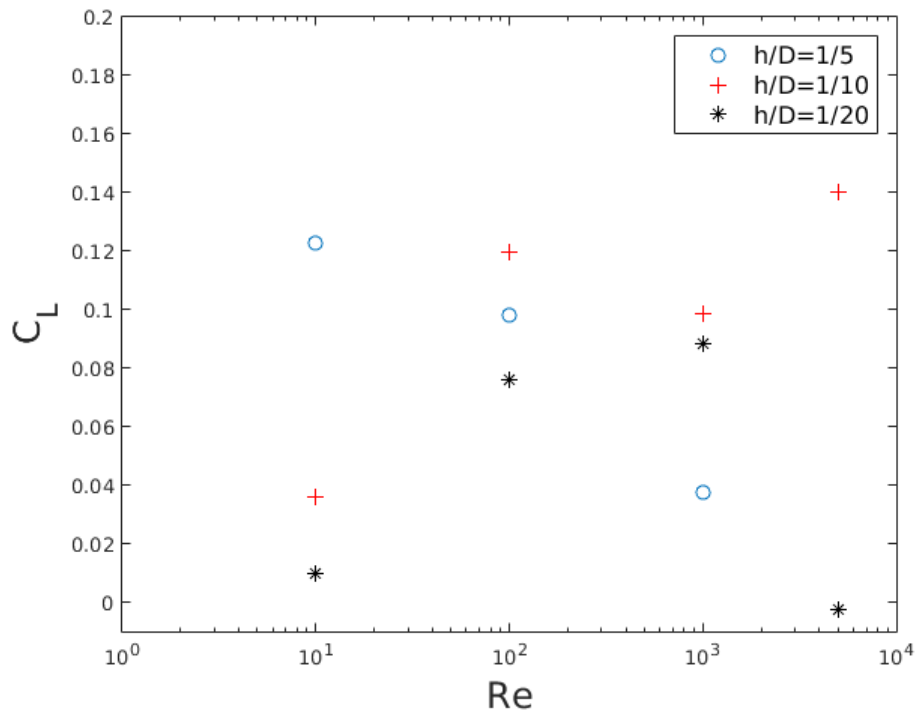
Utjecaj debljine mlaza na koeficijent uzgona prikazan je tablično u idućoj tablici uspored-  
bom za zajedničke Reynoldsove brojeve,  $Re$ : 10, 100, 1000, 5000.

<b>Re</b>	10	100	1000	5000
$C_L, \frac{h}{D} = \frac{1}{5}$	0,1227991	0,0981337	0,0377455	–
$C_L, \frac{h}{D} = \frac{1}{10}$	0,0360658	0,119811	0,0983423	0,1399494
$C_L, \frac{h}{D} = \frac{1}{20}$	0,00999965	0,0760182	0,088493045	-0,0025699

Tablica 7. Usporedba koeficijenta uzgona,  $C_L$

Vidljivo je da za  $Re = 10$  koeficijent uzgona smanjenjem omjera opada, a za više  $Re$  je najveći za slučaj  $\frac{h}{D} = \frac{1}{10}$ , osim što nemora vrijediti za  $Re$  za koje se mlaz potpuno omotao oko polucilindra.

Grafička usporedba dana je na idućoj slici.



Slika 30. Usporedba koef. uzgona  $C_L$

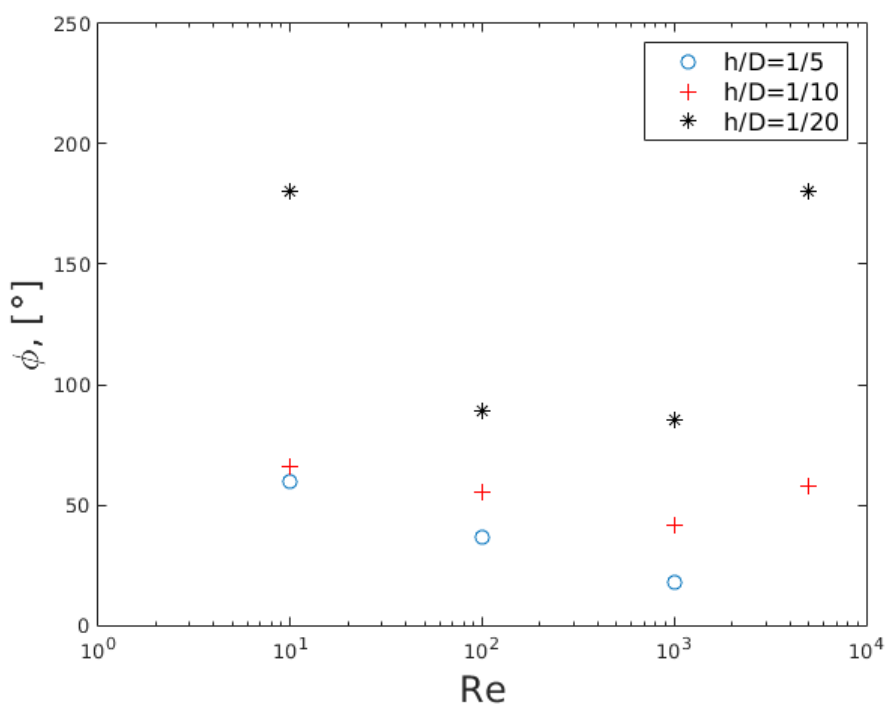
Za kut odvajanja strujanja slično kao i za koeficijente imamo dva slučaja. Prvi vrijedi za  $\frac{h}{D} = \frac{1}{5}$  i  $\frac{h}{D} = \frac{1}{10}$  gdje za  $Re \leq 1000$  porastom  $Re$  opada kut dok u slučaju  $\frac{h}{D} = \frac{1}{20}$  kut opada do  $Re = 50$  i zatim raste, tj. veći je za  $Re = 100$  i onda opada do  $Re = 1000$ . U turbulentnim strujanjima za sve slučajeve je isto, kut odvajanja raste porastom Reynoldsova broja. Utjecaj debljine mlaza na silu uzgona prikazan je tablično u idućoj tablici usporedbom za zajedničke Reynoldsove brojeve,  $Re$ : 10, 100, 1000, 5000.

Re	10	100	1000	5000
$\phi[^{\circ}], \frac{h}{D} = \frac{1}{5}$	59,61	36,3	17,983	–
$\phi[^{\circ}], \frac{h}{D} = \frac{1}{10}$	65,685	55,376	41,461	57,618
$\phi[^{\circ}], \frac{h}{D} = \frac{1}{20}$	180	83,59	85,04	180

**Tablica 8.** Usporedba kuta odvajanja,  $\phi$

Vidljivo je da smanjenjem omjera debljine mlaza i promjera cilindra kut odvajanja raste.

Grafička usporedba dana je na idućoj slici.



**Slika 31.** Usporedba kuta odvajanja  $\phi$

## 5 Zaključak

Može se zaključiti da je Coanda efekt veoma osjetljiv i na Reynoldsov broj i na geometriju odnosno omjer debljine mlaza i promjera cilindra. Što je navedeni omjer manji to je kut odvajanja strujanja veći, npr. za  $Re = 1000$  za omjer  $\frac{h}{D} = \frac{1}{5}$  iznosi 17,983 stupnjeva dok za omjer  $\frac{h}{D} = \frac{1}{10}$  iznosi već 41,461 stupanj, a za omjer  $\frac{h}{D} = \frac{1}{20}$  iznosi 85,04 stupnjeva. Dok također u turbulentnom strujanju povećanjem Reynoldsova broja povećava se i kut odvajanja, npr. za omjer  $\frac{h}{D} = \frac{1}{10}$  kut odvajanja za  $Re = 1000$  iznosi 41.4461 stupanj, a za  $Re = 5000$  iznosi 57,618 stupanj.

Koeficijent otpora na cilindar je generalno također veći što je omjer manji, npr. za  $Re = 1000$  za omjer  $\frac{h}{D} = \frac{1}{5}$  koef. otpora iznosi 0,0126027 dok za omjer  $\frac{h}{D} = \frac{1}{20}$  iznosi 0,08775555.

Koeficijent uzgona pokazuje najzanimljivije značajke, različitim ponašanjem unutar svakog slučaja za  $Re < 1000$ , gdje se za slučaj  $\frac{h}{D} = \frac{1}{5}$  povećava povećanjem  $Re$ , za slučaj  $\frac{h}{D} = \frac{1}{20}$  opada, dok za slučaj  $\frac{h}{D} = \frac{1}{10}$  raste pa opada. Pokazuje se i da je najveći za slučaj  $\frac{h}{D} = \frac{1}{10}$  za  $Re \geq 100$  gdje za npr.  $Re = 1000$  za slučaj  $\frac{h}{D} = \frac{1}{5}$  iznosi 0,0377455, za slučaj  $\frac{h}{D} = \frac{1}{20}$  iznosi 0,088493, a za slučaj  $\frac{h}{D} = \frac{1}{10}$  iznosi 0,0983423. Takvo ponašanje koef. uzgona upućuje na to da je moguće i tražiti optimalnu geometriju za dobivanje najveće sile uzgona za zadani Reynoldsov broj.

U daljnjim istraživanjima Coanda efekta trebalo bi istražiti strujanja mlazova u nemirućoj okolini kao i prostorna opstrujavanja, u ovom radu je zrak u području bio u početku u stanju mirovanja i ravninsko strujanje. Također bi trebalo istražiti različito pozicioniranje nastrojavanja mlaza na 3D objektima prilikom kretanja, može li se bitno utjecati na silu na objekt.



# LITERATURA

- [1] Virag Z., Džijan I.: *Računalna dinamika fluida* , Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2014.
- [2] *Mehanika fluida I.* , Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2014.
- [3] *Mehanika fluida II.* , Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2014.
- [4] Ferziger J.H., Perić M.: *Computational Methods for Fluid Dynamics* , Springer Science and Business Media, 2002.
- [5] Parks E.K., Petersen R.E.: *Analysis of a "Coanda" Type Flow* , The University of Arizona, 1968.
- [6] Gross A., Fasel H.F.: *RANS, URANS, and LES of Coanda Wall Jet Flows* , The University of Arizona, 2006.
- [7] Wernz S., Hermann F. Fasel: *Numerical Investigation of Forced Coanda Wall Jets* , The University of Arizona, 2004.
- [8] Gan C., Salleh Mohamed S.K., Tan C.: *Numerical investigation on Coanda flow over a logarithmic surface* , Journal of Mechanical Science and Technology, 2015.
- [9] Reba I.: *Applications of the Coanda effect* , Scientific American, 1966.

# PRILOZI

## I. DVD-R disc